

Boxoft Image To PDF Demo. Purchase from www.Boxoft.com
to remove the watermark

В.И. Андреев, И.А. Потехин

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ПРОЧНОСТИ ТОЛСТОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Московский
строительный



государственный
институт

Москва 2011

Рецензенты:

академик РААСН, проф., д.т.н. *Н.И.Карпенко*,
академик РААСН, проф., д.т.н. *В.В.Петров*

Андреев В.И., Потехин И.А.

Оптимизация по прочности толстостенных оболочек: Монография –
М.: МГСУ, 2011. – 86 стр.

ISBN 978-5-7264-0509-4

В монографии рассматривается способ оптимизации толстостенных цилиндрических и сферических (полусферических) оболочек, основанный на решении обратных задач теории упругости неоднородных тел. Для цилиндрических оболочек задача решается в осесимметричной плоской постановке, а для сферических – в центральносимметричной постановке. Построены модели равнонапряженных и равнопрочных оболочек. В первом случае определяется такая функция изменения модуля упругости от радиуса, при которой эквивалентное напряжение, соответствующее определенной теории прочности, постоянно. При этом, учитывая одновременное изменение расчетного сопротивления материала, оболочка не будет равнопрочной. Для получения модели равнопрочной оболочки в обратной задаче определяются две функции, описывающие изменение как деформационных, так и прочностных характеристик материала. Рассматриваются примеры построения моделей бетонных и железобетонных оболочек с учетом анизотропии.

Книга предназначена для аспирантов, научных работников и специалистов, занимающихся проектированием и строительством толстостенных конструкций. Предполагается, что читатели знакомы с основными понятиями теории упругости.

Рекомендовано Научно-техническим советом МГСУ

ISBN 978-5-7264-0509-4

© Андреев В.И.,
Потехин И.А., 2011
© МГСУ, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из перспективных направлений в расчетах строительных конструкций является учет неоднородности структуры материала и его физико-механических свойств. Использование таких расчетов для толстостенных цилиндрических и сферических оболочек имеет большое практическое значение. Толстостенные оболочки находят широкое применение во многих областях техники. В частности, в строительстве – это трубы различного назначения, тепловые защиты, реакторные установки, радиационно-тепловые экраны ядерных реакторов и т. д. В подобных конструкциях распределение напряжений неравномерно. При этом первичное исчерпание прочности материала конструкции наблюдается лишь в небольшой области в местах концентрации напряжений. Учет неоднородности материала, возникающей по той или иной причине, приводит к существенному перераспределению напряжений в теле конструкции. Причем это перераспределение носит зачастую не только количественный, но и качественный характер. Учитывая это, при решении задачи оптимизации работы конструкции одним из направлений может быть создание такой искусственной неоднородности материала, при которой предельное состояние будет возникать одновременно во всех точках конструкции. Разработка методов, позволяющих с наибольшей эффективностью использовать прочностные характеристики материала, является перспективным направлением в развитии строительной механики. Создание подобных методов расчета позволит получить определенный экономический эффект по уменьшению толщины оболочки неоднородной конструкции, или позволит повышать нагрузку на конструкцию в сравнении с однородным аналогом.

Решение перечисленных проблем приводит к решению задач теории упругости неоднородных тел, которая является разделом механики сплошных сред. На развитие теории упругости неоднородных тел оказали большое влияние работы отечественных ученых А.Т.Василенко, Я.М.Григоренко, И.И.Гольденבלата, Б.И.Биргера, Г.Б.Колчина, А.Д.Коваленко, Ю.М.Коляно, В.А.Ломакина, С.Г.Лехницкого, С.Г.Михлина, Н.Д.Панкратовой, Я.С.Подстригача, В.П.Плевако, Н.А.Ростовцева и многих других. Также решением широкого круга проблем теории упругости неоднородных тел занимались и польские ученые: В.Ольшак, Я.Рыхлевский, В.Урбановский, К.Голецкий. Среди западных авторов изучением подобных вопросов занимались Б.Гейтвуд, Х.Конвей, Д.Л.Клементс и др.

При решении указанных выше задач оптимизации работы конструкции необходимо прибегнуть к решению обратных задач теории упругости неоднородных тел. Суть обратной задачи состоит в отыскании таких зависимостей деформационных характеристик материала конструкции от координат, при которых состояние конструкции будет заданным.

В результате решения обратных задач удается построить модели неоднородных толстостенных оболочек, в которых эквивалентное напряжение, соответствующее той или иной теории прочности, будет постоянным во всем объеме конструкции. Такие конструкции называются **равнонапряженными** [5].

Однако, при изменении деформационных характеристик, как правило, изменяются и прочностные свойства материала. Конструкция называется **равнопрочной**, если предельное состояние возникает одновременно во всех ее точках. При этом конструкция может не быть равнонапряженной. Конструкция будет и равнонапряженной, и равнопрочной, если предельное напряжение (предел прочности) во всех ее точках будет постоянным.

Практическое создание толстостенных оболочек с непрерывным изменением физико-механических характеристик довольно затруднительно, в связи с чем одним из путей реального создания оптимизированных конструкций является переход от непрерывной неоднородности к кусочно-постоянным зависимостям. В данном случае полученные модели конструкций можно называть близкими к равнопрочным.

В монографии рассматриваются задачи оптимизации по прочности осесимметрично нагруженных бетонных толстостенных цилиндрических и сферических оболочек, а также железобетонного цилиндра. Ее целью является разработка методов оптимизации работы указанных оболочек, анализ влияния неоднородности на напряженно-деформированное состояние конструкции, а также разработка рекомендаций по проектированию данных конструкций.

Достаточно очевидно, что для реального воплощения в жизнь разработанных моделей необходима совместная работа расчетчиков, специалистов по строительным материалам и технологов.

Авторы выражают глубокую благодарность действительным членам Российской академии архитектуры и строительных наук Николаю Ивановичу Карпенко и Владилену Васильевичу Петрову за высказанную в рецензиях положительную оценку монографии и практические советы по развитию направлений исследований, изложенных в данной книге.

ГЛАВА 1. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Для неоднородной среды справедливы все основные уравнения механики деформируемого твердого тела. Отличие заключается в том, что в неоднородных телах в соотношениях, связывающих компоненты тензоров напряжений и деформаций, механические характеристики являются функциями координат.

Для удобства изложения ниже приводятся уравнения, определяющие напряженное и деформированное состояния тела, а также физические соотношения теории упругости. В соответствии с рассматриваемыми в монографии задачами здесь приводятся лишь уравнения в цилиндрической и сферической системах координат. Более полные уравнения, включающие физические соотношения для упруго-пластических и вязкоупругих тел, приведены в [1].

1.1. Уравнения теории упругости неоднородных тел

Дифференциальные уравнения равновесия

Цилиндрические координаты (r, θ, z)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \Theta &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Для плоской осесимметричной задачи с учетом $\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ и

$\tau_{ij} = 0$ получим

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0. \quad (1.2)$$

Здесь R – объемная нагрузка. Второе и третье уравнения (при $Z = 0$) удовлетворяются тождественно. Отметим, что в рассматриваемых задачах все функции зависят только от r , и, таким образом, от частных производных перейдем к обыкновенным производным. Ниже будут рассматриваться две плоские осесимметричные задачи, соответствующие плоскому напряженному и плоскому деформируемому состояниям. Для обеих задач справедливо уравнение (1.2).

Сферические координаты (r, θ, φ) .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] + \Theta &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) + \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

По аналогии с осесимметричной задачей при наличии центральной симметрии из трех приведенных уравнений остается только одно, которое с учетом $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ принимает вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + R = 0. \quad (1.4)$$

Соотношения Коши

Из трех компонент перемещения в осесимметричной и центрально-симметричной задачах отличным от нуля будет только перемещение вдоль радиальной координаты, которое обозначается u . Это перемещение в обеих задачах связано с относительными линейными деформациями равенствами:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (1.5)$$

Условия совместности деформаций Сен-Венана

Из соотношений (1.5) легко получить условие совместности деформаций, называемое также условиями (уравнениями) неразрывности или сплошности. Продифференцировав второе равенство (1.5), приходим к равенству

$$\frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} + \frac{\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_r}{r} = 0. \quad (1.6)$$

Физические соотношения (закон Гука)

Как было отмечено выше, в книге рассматриваются две осесимметричные плоские задачи в цилиндрических координатах: плоское напряженное состояние (ПНС) и плоское деформированное состояние (ПДС).

Цилиндрические координаты

ПНС – прямая форма

Учитывая, что при ПНС $\sigma_z = 0$, закон Гука имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_{\theta}), \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r), \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_{\theta}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

ПДС – прямая форма

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E^*} (\sigma_r - \nu^* \sigma_{\theta}), \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E^*} (\sigma_{\theta} - \nu^* \sigma_r), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $E^* = E/(1 - \nu^2)$; $\nu^* = \nu/(1 - \nu)$.

Учитывая, что при ПДС $\varepsilon_z = 0$, из третьего равенства обобщенного закона Гука получим

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (1.8a)$$

ПНС – обратная форма

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 3\lambda e + 2\mu\varepsilon_r; \\ \sigma_\theta &= 3\lambda e + 2\mu\varepsilon_\theta; \\ \sigma_z &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_z = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$ – объемная деформация, а λ и μ – константы Ляме:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Из третьего равенства (1.9) можно выразить ε_z через ε_r и ε_θ .

ПДС – обратная форма

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_r; \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_\theta; \\ \sigma_z &= \lambda e. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь $e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta$, а $\varepsilon_z = 0$.

Таким образом, полная система уравнений осесимметричной плоской задачи содержит 5 независимых функций $(\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, u)$, а ε_z при ПНС и σ_z при ПДС можно найти соответственно из третьих равенств (1.7) и (1.10). Для этих пяти неизвестных функций имеем систему из пяти уравнений: (1.2), (1.5) и первые два уравнения (1.7) – для ПНС или (1.8) – для ПДС. Заметим, что если исключить из рассмотрения перемещения u , то вместо равенств (1.5) можно использовать условие совместности деформаций (1.6).

Сферические координаты

Учитывая, что в центрально-симметричной задаче $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, обобщенный закон Гука запишем в виде:

Прямая форма

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta); \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}[(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r],\end{aligned}\tag{1.11}$$

Обратная форма

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda e + 2\mu\varepsilon_r; \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi = \lambda e + 2\mu\varepsilon_\theta,\end{aligned}\tag{1.12}$$

где $e = \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta$.

Таким образом, как и в плоской осесимметричной задаче, полная система уравнений центрально-симметричной задачи содержит 5 независимых функций $\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ и u . Для определения этих функций имеем также систему из пяти уравнений: (1.4), (1.5) и (1.11). Также в этой системе соотношения (1.5) можно заменить равенством (1.6).

Следует отметить, что в рассматриваемых задачах в неоднородных телах физические соотношения в общем случае содержат механические характеристики E и ν , зависящие от радиуса.

1.2. Прямые задачи

Прямыми в теории упругости неоднородных тел называются задачи, в которых определяется напряженно-деформированное состояние тела при известных краевых условиях и заданных (известных) функциях неоднородности. В рассматриваемых в монографии плоской осесимметричной и центральносимметричной задачах имеет место так называемая *одномерная неоднородность*, когда механические характеристики E и ν зависят от *одной* переменной, в данном случае – радиуса. Далее ограничимся случаем, когда коэффициент Пуассона $\nu = const$, а $E = E(r)$.

1.2.1. Вывод разрешающих уравнений

Плоская осесимметричная задача

Сначала приведем вывод разрешающего уравнения для случая ПНС, если в качестве разрешающей функции выбрано напряжение σ_r [1]. Преимуществом такого способа решения является наибольшая про-

стота граничных условий при решении первой краевой задачи. В дальнейшем будем полагать $R = 0$.

Выразим из (1.2) напряжения σ_θ :

$$\sigma_\theta = r\sigma_r' + \sigma_r. \quad (1.13)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по радиусу.

Подставляя равенство (1.13) в первые два соотношения (1.7), найдем выражения для деформаций через напряжение σ_r :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu r\sigma_r']; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma_r + r\sigma_r']. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Окончательно, подставив полученные равенства в (1.6), получим разрешающее уравнение для рассматриваемой задачи:

$$\sigma_r'' + \varphi(r)\sigma_r' + \psi(r)\sigma_r = 0, \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{3}{r} - \frac{E'}{E}; \\ \psi(r) &= -\frac{1-\nu}{r} \cdot \frac{E'}{E}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Уравнение (1.15) является обыкновенным линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка **с переменными коэффициентами**. Именно последнее отличает задачи теории упругости неоднородных тел от классической теории упругости и существенно осложняет решение задач. Поскольку неоднородность материала может быть обусловлена многочисленными разнообразными причинами, функции неоднородности $E(r)$ также будут разными, и для каждой из них будет свое решение.

Аналогично может быть получено разрешающее уравнение для ПДС. Не приводя здесь промежуточных выкладок, отметим, что в итоге уравнение для ПДС по форме совпадает с уравнением (1.15), коэффициенты которого имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{3}{r} - \frac{E'}{E}; \\ \psi(r) &= -\frac{1-2\nu}{r(1-\nu)} \cdot \frac{E'}{E}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Центрально-симметричная задача

Ход вывода разрешающего уравнения для данной задачи аналогичен рассмотренному выше. Из уравнения равновесия (1.4) выразим напряжения σ_θ :

$$\sigma_\theta = \frac{r}{2} \sigma'_r + \sigma_r.\tag{1.18}$$

Подставив полученное равенство в соотношения (1.11), получим выражения для деформаций, после подстановки которых в условие совместности (1.6) придем к уравнению, совпадающему по форме с (1.15). Коэффициенты этого уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{4}{r} - \frac{E'}{E}; \\ \psi(r) &= \frac{2(1-2\nu)}{r(1-\nu)} \cdot \frac{E'}{E}.\end{aligned}\tag{1.19}$$

В итоге для всех трех рассматриваемых задач разрешающее уравнение имеет вид (1.15), а коэффициенты этого уравнения соответственно выражаются формулами (1.16), (1.17) и (1.19).

1.2.2. Методы решения прямых задач

Если функция $E(r)$ представляется простой зависимостью, то решение уравнения (1.15) может быть получено аналитически [1]. В качестве примера приведем решения плоской задачи (ПДС) и центрально-симметричной задачи для несжимаемого материала.

После подстановки в (1.17) и в (1.19) $\nu = const = 0,5$ для коэффициентов $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ получаются следующие выражения:

плоское деформированное состояние

$$\varphi(r) = \frac{3}{r} - \frac{E'}{E}; \quad \psi(r) = 0.\tag{1.20}$$

центрально-симметричная задача

$$\varphi(r) = \frac{4}{r} - \frac{E'}{E}; \psi(r) = 0. \quad (1.21)$$

В этих двух случаях удастся понизить порядок уравнения (1.15), и его решение находится элементарно:

плоское деформированное состояние

$$\sigma_r = C_2 + C_1 \int \frac{E(r)dr}{r^3}; \quad (1.22)$$

центрально-симметричная задача

$$\sigma_r = C_2 + C_1 \int \frac{E(r)dr}{r^4}. \quad (1.23)$$

Решения (1.22) и (1.23) содержат произвольные постоянные C_1 и C_2 , подлежащие определению из граничных условий.

При относительно простых зависимостях $E(r)$ (степенная, экспоненциальная и др.) уравнение (1.15) приводится к известным классическим уравнениям, имеющим аналитическое решение [1, 21].

При более сложных зависимостях уравнение (1.15) решается численно. Рассмотрим ход численного решения рассматриваемых задач.

Уравнение (1.15) с граничными условиями, записанными в общем виде

$$\begin{aligned} r = a, \quad \alpha_1 \sigma_r + \alpha_2 \sigma_r' &= A; \\ r = b, \quad \beta_1 \sigma_r + \beta_2 \sigma_r' &= B, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где a и b – соответственно радиусы внутренней и внешней границ тела, представляет собой двухточечную краевую задачу.

Наиболее просто представляются граничные условия в первой краевой задаче, когда к границам тела приложены равномерно распределенные усилия p_a и p_b (растягивающие или сжимающие). В этом случае

$\alpha_2 = \beta_2 = 0$, и эти условия имеют вид:

$$\begin{aligned} r = a, \quad \sigma_r &= \pm p_a; \\ r = b, \quad \sigma_r &= \pm p_b. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Если же на одной или обеих границах заданы перемещения, то граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} r = a, \quad u = u_a; \\ r = b, \quad u = u_b. \end{aligned} \tag{1.26}$$

В этом случае коэффициенты α_i, β_i, A и B определяются с использованием соотношений Коши, закона Гука и уравнений равновесия. Для трех рассматриваемых задач эти коэффициенты имеют вид:

плоское напряженное состояние

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{a(1-\nu)}{E(a)}; \quad \alpha_2 = \frac{a^2}{E(a)}; \quad A = u(a); \\ \beta_1 = \frac{b(1-\nu)}{E(b)}; \quad \beta_2 = \frac{b^2}{E(b)}; \quad B = u(b). \end{aligned} \tag{1.27}$$

плоское деформированное состояние

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{a(1-\nu)(1-2\nu)}{E(a)}; \quad \alpha_2 = \frac{a^2(1-\nu^2)}{E(a)}; \quad A = u(a); \\ \beta_1 = \frac{b(1-\nu)(1-2\nu)}{E(b)}; \quad \beta_2 = \frac{b^2(1-\nu^2)}{E(b)}; \quad B = u(b). \end{aligned} \tag{1.28}$$

центрально-симметричная задача

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{a(1-\nu)(1-2\nu)}{E(a)}; \quad \alpha_2 = \frac{a^2(1-\nu^2)}{E(a)}; \quad A = u(a); \\ \beta_1 = \frac{b(1-\nu)(1-2\nu)}{E(b)}; \quad \beta_2 = \frac{b^2(1-\nu^2)}{E(b)}; \quad B = u(b). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Уравнение (1.15) с граничными условиями (1.25) или (1.26) обычно решается методом конечных разностей [8, 20].

Переходя к конечно-разностной аппроксимации производных, входящих в уравнение (1.15), можно воспользоваться формулами:

при постоянном шаге интегрирования h

$$\begin{aligned} \sigma'_{r,i} &= (\sigma_{r,j+1} - \sigma_{r,j-1})/2h; \\ \sigma''_{r,i} &= (\sigma_{r,j+1} - 2\sigma_{r,j} + \sigma_{r,j-1})/h^2; \end{aligned} \tag{1.30}$$

при переменном шаге интегрирования

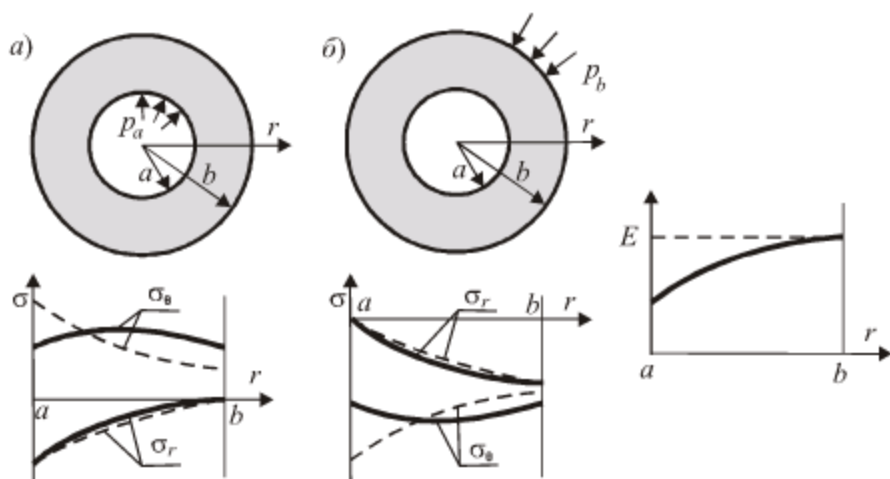
$$\begin{aligned} \sigma'_{r,j} &= (\sigma_{r,i+1} - \sigma_{r,i-1}) / (h_x + h_n); \\ \sigma''_{r,i} &= 2[h_x(\sigma_{r,i+1} - \sigma_{r,i}) - h_n(\sigma_{r,i} - \sigma_{r,i-1})] / [h_x h_n (h_x + h_n)], \end{aligned} \quad (1.31)$$

где h_x, h_n — соответственно шаги интегрирования слева и справа от i -той точки разбиения ($i = 2, 3, \dots, N-1$).

Подставляя (1.30) или (1.31) в (1.15), приходим к системе из $N-1$ алгебраического уравнения, которая вместе с двумя граничными условиями (2.45) даст $N+1$ уравнение для $N+1$ неизвестного. Существующие стандартные программы позволяют решать подобные системы достаточно высокого порядка практически с любой точностью, так что при использовании численных методов в одномерных задачах принят термин «решение близкое к точному».

1.3. Обратные задачи

Среди методов решения задач теории упругости неоднородных тел особую группу составляют обратные методы, суть которых заключается в определении таких функциональных зависимостей механических характеристик от координат, при которых напряженно-деформированное состояние тела либо совпадает с аналогичным в однородном теле, либо позволяет относительно просто получить решение задачи [29, 35]. В настоящей книге рассматривается еще один обратный метод, в котором разыскивается такая зависимость модуля упругости от радиуса, при которой напряженное состояние тела равно заданному. Идея такого метода основана на многочисленных результатах расчетов неоднородных тел, в которых показано, что если в некоторой области тела модуль упругости меньше, чем в однородном материале, то напряжения в этой области также уменьшаются, и наоборот. Проиллюстрируем это на примере задачи Ляме для толстостенного полого цилиндра (рис. 1).



14 Рис. 1. Напряженное состояние в толстостенной трубе при внутреннем (а) и внешнем (б) давлении.

— однородный материал;

Как видно из рисунка, и при внутреннем, и при внешнем давлении наибольшие нормальные напряжения σ_{θ} в случае однородного материала достигают максимальных значений вблизи внутреннего контура ($r = a$). В случае неоднородного материала при уменьшении модуля упругости в этой зоне (рис. 1,а) напряжения σ_{θ} в обоих рассматриваемых случаях уменьшаются. При этом радиальные напряжения σ_r мало зависят от неоднородности. Таким образом, в однородном цилиндре при достижении предельного состояния (если, например, использовать теорию прочности максимальных нормальных напряжений) его большая часть оказывается недогруженной. Приведенные рассуждения позволяют прийти к выводу, что если создать в цилиндре искусственную неоднородность, то можно *выровнять* эпюру σ_{θ} , приблизив цилиндр к равнонапряженному. Как было отмечено в предисловии, если при изменении деформационных свойств прочностные характеристики материала остаются постоянными, то такой цилиндр будет одновременно и равнопрочным. Однако, как правило, при изменении модуля упругости также изменяется и расчетное сопротивление материала. Более подробно способ построения равнопрочных конструкций в этом случае будет рассмотрен в последующих главах.

ГЛАВА 2. РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ПРОЧНОСТИ

В данной главе на основе четырех классических теорий прочности представлены решения обратных задач для получения математических моделей равнонапряженных толстостенного цилиндра, кольца и толстостенной сферической оболочки.

2.1. Теория прочности максимальных нормальных напряжений

2.1.1. Решение для цилиндра (диска)

Плоская задача теории упругости неоднородных тел для осесимметрично нагруженного цилиндра и кольца подробно рассмотрена в [1]. Будем считать, что цилиндр имеет достаточно большую длину, и в нем осуществляется плоское деформированное состояние (ПДС). В свою очередь, в тонком кольце будем рассматривать плоское напряженное состояние (ПНС). Ниже рассматриваются конструкции при отсутствии объемных нагрузок ($R = 0$). Обе рассматриваемые конструкции нагружены постоянными внутренним (p_a) и внешним (p_b) давлениями, а a и b – соответственно радиусы внутренней и внешней поверхностей цилиндра или кольца.

На основе первой теории прочности (максимальных нормальных напряжений) будем полагать, что эквивалентное напряжение σ_0 равно напряжению σ_θ , и условие равнонапряженности конструкции можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \sigma_\theta = \sigma_0 = \text{const} . \quad (2.1)$$

Подставляя $\sigma_\theta = \sigma_0 = \text{const}$ в уравнение равновесия (1.2) с учетом $R = 0$, получим

$$\sigma_r' + \frac{\sigma_r}{r} = \frac{\sigma_0}{r}. \quad (2.2)$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$\sigma_r = \frac{A}{r} + \sigma_0. \quad (2.3)$$

Константы A и σ_0 можно определить, используя граничные условия (1.25):

$$\begin{aligned} r = a, & \quad \sigma_r = -p_a; \\ r = b, & \quad \sigma_r = -p_b. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (2.4), найдем значения констант:

$$A = \frac{(p_b - p_a)ab}{b - a}; \quad \sigma_0 = \frac{p_a a - p_b b}{b - a}. \quad (2.5)$$

Прежде чем перейти к дальнейшему решению, объединим две плоских задачи (для ПДС и ПНС). Для этого перепишем разрешающее уравнение (1.15) в виде

$$\sigma_r'' + \left(\frac{3}{r} - \frac{E'}{E} \right) \sigma_r' - \frac{k}{r} \cdot \frac{E'}{E} \sigma_r = 0, \quad (2.6)$$

где с учетом формул (1.16) и (1.17)

$$\begin{aligned} k &= 1 - \nu \text{ для ПНС;} \\ k &= (1 - 2\nu)/(1 - \nu) \text{ для ПДС.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя выражение (2.3) в разрешающее уравнение (2.6), получим однородное линейное дифференциальное уравнение для определения распределения модуля упругости $E(r)$:

$$E' - \frac{A}{r[A(1-k) - k\sigma_0 r]} \cdot E = 0. \quad (2.8)$$

Разделив переменные в уравнении (2.8), интегрируем левую и правую части и, используя начальное условие ($r = a$; $E = E_0$), получаем искомую зависимость $E(r)$:

$$E(r) = E_0 \left[\frac{r}{a} \cdot \frac{A(1-k) - k\sigma_0}{A(1-k) - kr\sigma_0} \right]^{\frac{1}{1-k}}. \quad (2.9)$$

На рис.2.1 показаны зависимости $E(r)$, полученные для случая ПДС при трех значениях коэффициента Пуассона, соотношении радиусов $b/a = 2$ и давлениях $p_a = 6$ МПа, $p_b = 12$ МПа.

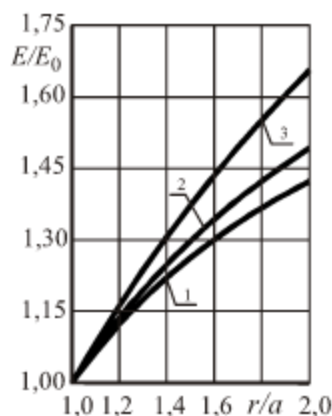


Рис.2.1. Распределение модуля упругости в равнонапряженном цилиндре
1 - $\nu = 0.1$; 2 - $\nu = 0.25$; 3 - $\nu = 0.4$

Как видно из рис. 2.1, различия в значениях E для рассмотренных значений коэффициента Пуассона лежат в пределах 20%.

На рис.2.2 представлено распределение напряжений σ_r , σ_θ и σ_z для описанных выше условий, как для однородного, так и для неоднородного цилиндров. При этом напряжения σ_θ определяются из уравнения равновесия (1.2), а напряжения σ_z – из соотношения (1.8,a). Можно заметить, что распределение напряжений σ_r и σ_θ практически

не зависит от величины коэффициента Пуассона. В то же время напряжения σ_z , вычисляемые при ПДС из условия $\varepsilon_z = 0$ по формуле $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$, зависят от ν .

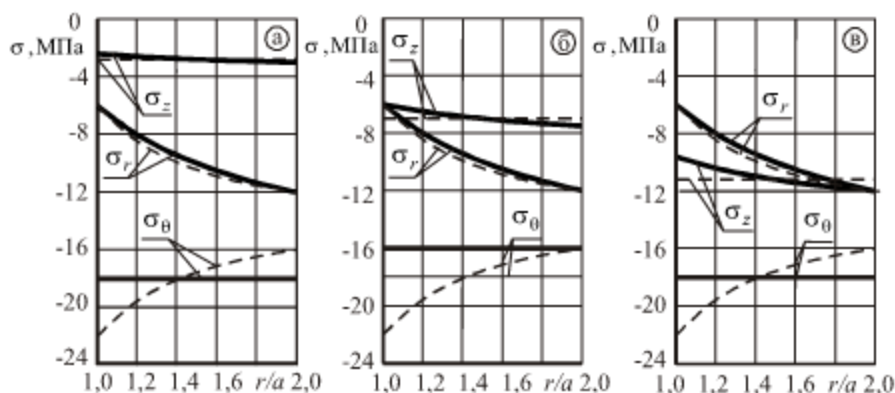


Рис.2.2. Распределение напряжений в цилиндре
а - $\nu = 0.1$; б - $\nu = 0.25$; в - $\nu = 0.4$
--- однородный цилиндр, - неоднородный цилиндр

В то же время при рассмотрении конечного достаточно длинного цилиндра, не подверженного действию осевых нагрузок, должно выполняться условие

$$\int_F \sigma_z dF = 0. \quad (2.10)$$

Чтобы удовлетворить этому равенству, к полученному напряженному состоянию согласно [35] нужно добавить постоянное напряжение σ_z^* противоположного знака, равное

$$\sigma_z^* = -\frac{1}{F} \int_F \sigma_z dF. \quad (2.11)$$

При этом остальные напряжения не изменятся. На рис.2.2 и последующих рисунках, помещенных в книгу, распределение напряжений σ_z соответствует напряженному состоянию, которое наблюдается в бесконечно длинном цилиндре (ПДЦ) или в длинном цилиндре, торцы которого закреплены от смещений.

2.1.2. Решение для сферической оболочки

Ход решения задачи о создании модели равнонапряженной толстостенной сферы для первой теории прочности аналогичен рассмотренному выше для толстостенного цилиндра. Приведем кратко решение рассматриваемого случая. Подставляя $\sigma_\theta = \sigma_\phi = \text{const}$ в уравнение равновесия (1.4), получим

$$\sigma_r' + \frac{2\sigma_r}{r} = \frac{2\sigma_\theta}{r}. \quad (2.12)$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + \sigma_\theta. \quad (2.13)$$

Константы A и σ_θ , определяемые из граничных условий (2.4), будут равны

$$A = \frac{(p_b - p_a) \cdot a^2 b^2}{b^2 - a^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}. \quad (2.14)$$

Подставляя функцию напряжений (2.13) в разрешающее уравнение (1.15) с коэффициентами (1.19), получаем однородное линейное дифференциальное уравнение для определения зависимости $E(r)$:

$$E' - \frac{2A}{r[(2-k)A - k\sigma_\theta r^2]} \cdot E = 0. \quad (2.15)$$

Разделив переменные в уравнении (2.15), интегрируем левую и правую части и, используя начальное условие ($r = a$; $E = E_0$), получаем искомую зависимость $E(r)$:

$$E(r) = E_0 \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \cdot \frac{A(2-k) - ka^2\sigma_0}{A(2-k) - kr^2\sigma_0} \right]^{\frac{1}{2-k}}. \quad (2.16)$$

Здесь $k = 2(1 - 2\nu)/(1 - \nu)$.

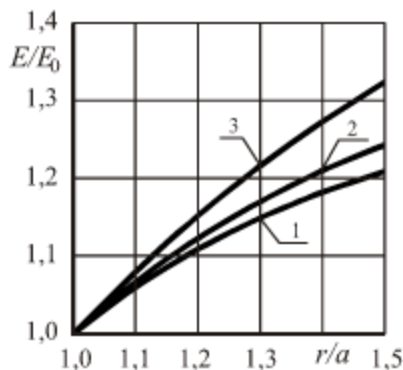


Рис.2.3. Распределение модуля упругости в равнонапряженной сфере. Обозначения такие же, как на рис.2.1

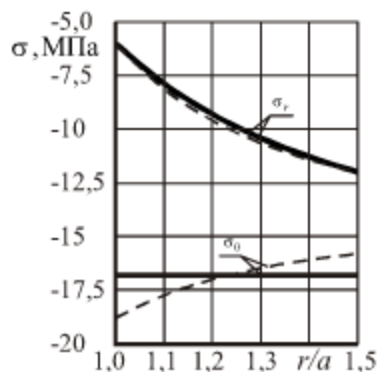


Рис.2.4. Распределение напряжений в равнонапряженной сфере.
 --- однородная сфера,
 — неоднородная сфера

Используя выражение (2.16), можно исследовать влияние коэффициента Пуассона на характер распределения функции $E(r)$. На рис.2.3 представлены графики зависимости $E(r)$, рассчитанные при значениях: $\nu_1 = 0,1$; $\nu_2 = 0,25$; $\nu_3 = 0,4$; $b/a = 1,5$, $p_a = 6$ МПа; $p_b = 12$ МПа.

Как видно из рис. 2.3, влияние коэффициента Пуассона на характер распределения функции $E(r)$ примерно такое же, как и в задаче о равнонапряженном цилиндре. На рис.2.4 представлено распределение напряжений σ_r и σ_θ для описанных выше условий для неоднородной конструкции, а также распределение указанных выше напряжений в аналогичных условиях для однородной конструкции. Как показывают расчеты, так же как и в случае с равнонапряженным цилиндром распределение напряжений σ_r и σ_θ в равнонапряженной сферической оболочке практически не зависит от величины коэффициента Пуассона.

2.2. Теория прочности максимальных линейных деформаций

2.2.1. Решение для цилиндра (диска)

Для второй теории прочности условие равнонапряженности имеет следующий вид:

$$\sigma_{\theta} - (1-k)\sigma_r = \sigma_0 = const.$$

Подставляя $\sigma_{\theta} = \sigma_0 + (1-k)\sigma_r$ в уравнение равновесия (1.2), получим

$$\sigma_r' + k \frac{\sigma_r}{r} = \frac{\sigma_0}{r}. \quad (2.17)$$

Заметим, что σ_0 в данном равенстве является некоторой константой и не равно предельному напряжению. Здесь $k = (1 - 2\nu)/(1 - \nu)$ для ПДС и $k = 1 - \nu$ для ПНС.

Решением этого дифференциального уравнения будет следующая функция

$$\sigma_r = \frac{1}{k} \cdot (\sigma_0 - A \cdot r^{-k}). \quad (2.18)$$

Константы A и σ_0 можно определить, используя граничные условия (2.4). Из них получаем:

$$A = \frac{p_b - p_a}{b^{-k} - a^{-k}} \cdot k; \quad \sigma_0 = \frac{p_a a^{-k} - p_b b^{-k}}{b^{-k} - a^{-k}} \cdot k. \quad (2.19)$$

Подставляя функцию (2.18) в разрешающее уравнение (1.15) с учетом (1.17), получаем однородное линейное дифференциальное уравнение для определения распределения модуля упругости $E(r)$:

$$E' - (2-k) \cdot \frac{A}{\sigma_0} \cdot r^{-(k+1)} \cdot E = 0. \quad (2.20)$$

Разделив переменные в уравнении (2.20) и проинтегрировав левую и правую части, с учетом начального условия ($r = a$; $E = E_0$) найдем искомую зависимость $E(r)$:

$$E(r) = E_0 \exp \left[\frac{A}{\sigma_0} \cdot \frac{k-2}{k} \cdot (r^{-k} - a^{-k}) \right]. \quad (2.21)$$

На рис.2.5 представлены графики зависимости $E(r)$, рассчитанные для плоского деформированного состояния при трех значениях коэффициента Пуассона ($\nu_1 = 0,1$; $\nu_2 = 0,25$; $\nu_3 = 0,4$) и следующих исходных данных: $p_a = 6$ МПа; $p_b = 12$ МПа; $b/a = 2$.

Как видно из рис. 2.5, влияние коэффициента Пуассона на характер распределения функции $E(r)$ проявляется более сильно, чем при расчете по первой теории прочности. На рис. 2.6 представлено распределение на-

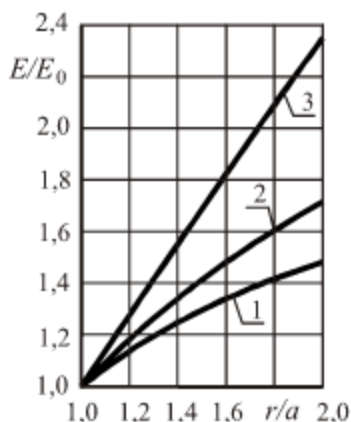


Рис.2.5. Распределение модуля упругости в равнонапряженном цилиндре. Обозначения такие же, как на рис.2.1

пряжений σ_r , σ_θ и σ_z для описанных выше условий для неоднородного цилиндра, а также распределение тех же напряжений в аналогичных условиях для однородной конструкции. Как можно видеть, распределение напряжений зависит от величины коэффициента Пуассона. И чем больше величина этого коэффициента, тем значительнее напряжения в неоднородной конструкции отличаются от соответствующих напряжений в однородном аналоге.

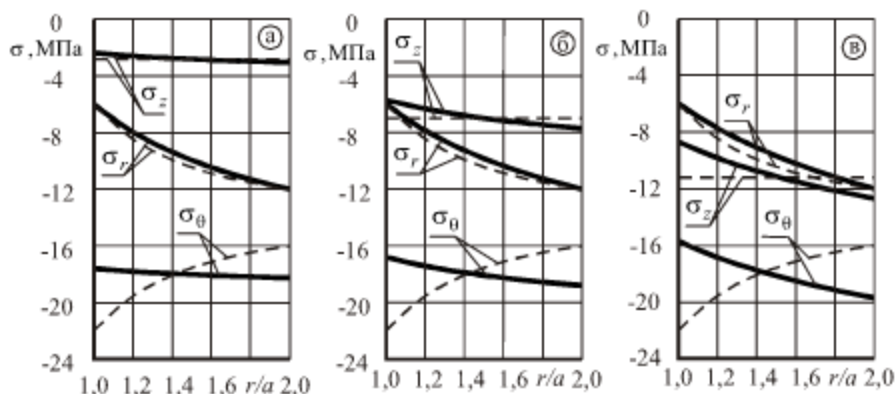


Рис.2.6. Распределение напряжений в равнонапряженном цилиндре. Обозначения такие же как на рис.2.2

2.2.2. Решение для сферы

Для теории максимальных линейных деформаций условие равнонапряженности имеет вид:

$$[2\sigma_\theta - (2 - k)\sigma_r] / (4 - k) = \sigma_0 = const,$$

где $k = 2(1 - 2\nu)/(1 - \nu)$.

Подставляя полученное из последнего равенства выражение для σ_θ в уравнение равновесия (1.4), получим

$$\sigma_r' + k \frac{\sigma_r}{r} = (4 - k) \cdot \frac{\sigma_0}{r}. \quad (2.22)$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$\sigma_r = \frac{(4-k)\sigma_0 - A \cdot r^{-k}}{k}. \quad (2.23)$$

Константы A и σ_0 определяются из граничных условий (2.4). Значения этих постоянных:

$$A = \frac{p_b - p_a}{b^{-k} - a^{-k}} \cdot k; \quad \sigma_0 = \frac{p_a a^{-k} - p_b b^{-k}}{b^{-k} - a^{-k}} \cdot \frac{k}{4-k}. \quad (2.24)$$

Подставив функцию σ_r из (2.23) в разрешающее уравнение (1.15) с коэффициентами (1.19), получаем однородное линейное дифференциальное уравнение для определения распределения модуля упругости $E(r)$:

$$E' - \frac{A}{\sigma_0} \cdot \frac{3-k}{4-k} \cdot r^{-(k+1)} \cdot E = 0. \quad (2.25)$$

Разделив переменные в уравнении (2.25), интегрируем левую и правую части и, используя начальное условие ($r = a$, $E = E_0$), получаем искомую зависимость $E(r)$:

$$E(r) = E_0 \exp \left[-\frac{A}{\sigma_0 k} \cdot \frac{3-k}{4-k} \cdot (r^{-k} - a^{-k}) \right]. \quad (2.26)$$

На рис. 2.7 представлены графики зависимости $E(r)$, рассчитанные при трех значениях коэффициента Пуассона (0,1; 0,25; 0,4) для случая:

$b/a = 1.5$; $p_a = 6$ МПа; $p_b = 12$ МПа.

Как видно из рис.2.7, влияние коэффициента Пуассона на характер распределения функции $E(r)$ довольно значительное. На рис.2.8 показано распределение напряжений σ_r и σ_θ как для однородной, так и для неоднородной конструкции. При этом можно заметить, что, так же как и в случае с равнонапряженным цилиндром, в сфере распределение напряжений σ_r в малой степени, а σ_θ – довольно существенно зависит от величины коэффициента Пуассона.

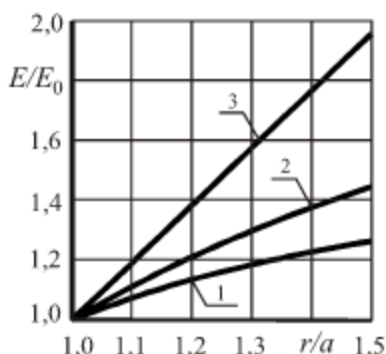


Рис.2.7. Распределение модуля упругости в равнонапряженной сфере. Обозначения такие же, как на рис.2.1

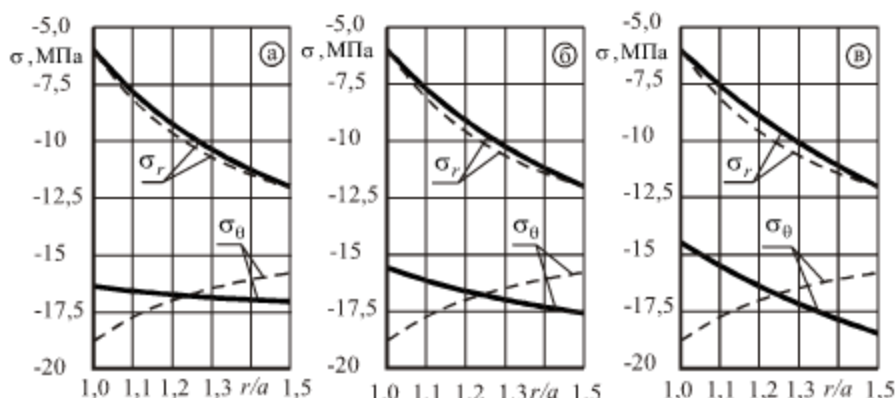


Рис.2.8. Распределение напряжений в равнонапряженной сфере
 а - $\nu = 0.1$; б - $\nu = 0.25$; в - $\nu = 0.4$
 --- однородная сфера, - неоднородная сфера

2.3. Теория прочности максимальных касательных напряжений

2.3.1. Решение для цилиндра (диска)

Для рассматриваемой теории условие прочности зависит от того, какую конструкцию, диск или цилиндр, рассчитывают. Кроме того, в зависимости от соотношения главных напряжений тоже возможно несколько вариантов. Поэтому чтобы наиболее полно представить всю картину, целесообразно рассмотреть отдельно расчет диска и цилиндра.

Решение задачи оптимизации для диска (вариант 1)

При действии в окружном направлении растягивающих напряжений главные напряжения определяются следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_z = 0$ и $\sigma_3 = \sigma_r$. С учетом этого условие равнонапряженности запишется в виде: $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 = const$. Это условие также рассмотрено в работе [1]. Подставляя в уравнение равновесия (1.3) выражение $\sigma_\theta = \sigma_0 + \sigma_r$, получим

$$\sigma'_r = \frac{\sigma_0}{r}. \quad (2.27)$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$\sigma_r = \sigma_0 \ln r + A. \quad (2.28)$$

Из граничных условий (2.4) найдем константы A и σ_0 :

$$A = \frac{p_b \ln a - p_a \ln b}{\ln b - \ln a}; \quad \sigma_0 = \frac{p_a - p_b}{\ln b - \ln a}. \quad (2.29)$$

Из уравнения (1.3) получим выражение для σ_θ :

$$\sigma_\theta = \sigma_0(1 + \ln r) + A. \quad (2.30)$$

Подставляя функцию напряжений (2.28) в разрешающее уравнение (1.15) с учетом (1.16), получаем уравнение для определения распределения модуля упругости $E(r)$:

$$E' - \frac{2\sigma_0}{r[\sigma_0(1 + k \cdot \ln r) + A \cdot k]} \cdot E = 0. \quad (2.31)$$

После разделения переменных в уравнении (2.31), интегрирования и использования начального условия ($r = a$; $E = E_0$), получаем зависимость $E(r)$:

$$E(r) = E_0 \left[\frac{(p_a - p_b)(1 + k \ln r) + k(p_b \ln a - p_a \ln b)}{(p_a - p_b)(1 + k \ln a) + k(p_b \ln a - p_a \ln b)} \right]^{\frac{2}{k}}. \quad (2.32)$$

Решение задачи оптимизации для диска (вариант 2)

При действии в окружном направлении сжимающих напряжений главными напряжениями будут: $\sigma_1 = \sigma_z = 0$, $\sigma_2 = \sigma_r$ и $\sigma_3 = \sigma_\theta$. С учетом этого условие равнонапряженности запишется в виде: $-\sigma_\theta = \sigma_0 = \text{const}$. Подставляя в уравнение равновесия (1.2) выражение $\sigma_\theta = -\sigma_0$, получим решение, совпадающее с решением для теории прочности максимальных нормальных напряжений.

Решение задачи оптимизации для цилиндра (вариант 1)

При действии в окружном направлении растягивающих напряжений главные напряжения определяются следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_\theta$, $\sigma_2 = \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ и $\sigma_3 = \sigma_r$. С учетом этого условие равнонапряженности запишется в виде: $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 = \text{const}$. Подставляя в уравнение равновесия (1.2) выражение $\sigma_\theta = \sigma_r + \sigma_0$, получим решение, совпадающее с решением для теории прочности максимальных касательных напряжений при решении задачи оптимизации для диска (вариант 1) при замене коэффициента $k = 1 - \nu$ при плоском напряженном состоянии на коэффициент $k = (1 - 2\nu)/(1 - \nu)$, соответствующий плоско-моду деформированному состоянию.

Решение задачи оптимизации для цилиндра (вариант 2)

При действии в окружном направлении сжимающих напряжений главные напряжения равны: $\sigma_1 = \sigma_r$, $\sigma_2 = \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ и $\sigma_3 = \sigma_\theta$. С учетом этого условие равнонапряженности примет вид: $\sigma_r - \sigma_\theta = \sigma_0 = const$. Подставляя в уравнение равновесия (1.2) выражение $\sigma_\theta = \sigma_r - \sigma_0$, получим решение, совпадающее с решением для теории прочности максимальных касательных напряжений при решении задачи оптимизации для цилиндра (вариант 1).

Решение задачи оптимизации для цилиндра (вариант 3)

При действии в окружном направлении сжимающих напряжений главные напряжения могут определяться также следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$, $\sigma_2 = \sigma_r$ и $\sigma_3 = \sigma_\theta$. С учетом этого условие равнонапряженности после преобразований имеет вид: $[(1-k)\sigma_r - \sigma_\theta]/(2-k) = \sigma_0 = const$. Выразив из этого равенства σ_θ и подставив его в уравнение равновесия (1.2), получим

$$\sigma_r' + k \frac{\sigma_r}{r} = -(2-k) \cdot \frac{\sigma_0}{r}. \quad (2.33)$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$\sigma_r = \frac{A \cdot r^{-k} - (2-k)\sigma_0}{k}. \quad (2.34)$$

Константы A и σ_0 определим, используя граничные условия (2.4):

$$A = k \cdot \frac{p_a - p_b}{b^{-k} - a^{-k}}; \quad \sigma_0 = \frac{k}{2-k} \cdot \frac{p_a b^{-k} - p_b a^{-k}}{b^{-k} - a^{-k}}.$$

Подставляя функцию напряжений (2.34) в разрешающее уравнение (1.15) с учетом (1.17), получаем однородное линейное дифференциальное уравнение для определения распределения модуля упругости $E(r)$:

$$E' - \frac{A}{\sigma_0} \cdot r^{-(k+1)} \cdot E = 0. \quad (2.35)$$

После интегрирования уравнения (2.35), с учетом условия ($r = a$; $E = E_0$) получаем зависимость $E(r)$:

$$E(r) = E_0 \exp \left[-\frac{A}{k\sigma_0} \cdot (r^{-k} - a^{-k}) \right]. \quad (2.36)$$

На рис.2.9 представлены графики зависимости $E(r)$, вычисленные при значениях $\nu_1 = 0,1$; $\nu_2 = 0,25$; $\nu_3 = 0,4$; $b/a = 2$; $p_a = 6$ МПа; $p_b = 12$ МПа.

Величина коэффициента k для плоского деформированного состояния (цилиндр) равна $k = (1 - 2\nu_i)/(1 - \nu_i)$. При этом для значений коэффициента Пуассона $\nu_1 = 0,1$ и $\nu_2 = 0,25$ зависимость $E(r)$ определяется решением задачи оптимизации для цилиндра (вариант 3), поскольку для напряжений выполняется соотношение $\sigma_z > \sigma_r > \sigma_\theta$, соответствующее этому варианту, а для значения $\nu_3 = 0,4$ – решением задачи оптимизации для цилиндра (вариант 1), так как напряжения соотносятся как $\sigma_r > \sigma_z > \sigma_\theta$, что соответствует указанному решению с учетом поправки на знак эквивалентного напряжения.

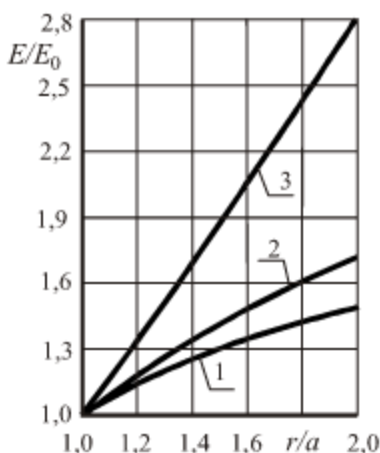


Рис.2.9. Распределение модуля упругости в равнонапряженном цилиндре. Обозначения такие же, как на рис.2.1

Как видно из рис.2.9, влияние коэффициента Пуассона на характер распределения функции $E(r)$ значительно. На рис. 2.10 показано распределение напряжений в неоднородном (равнонапряженном) цилиндре, а также в однородном при тех же размерах и нагрузках. Анализируя

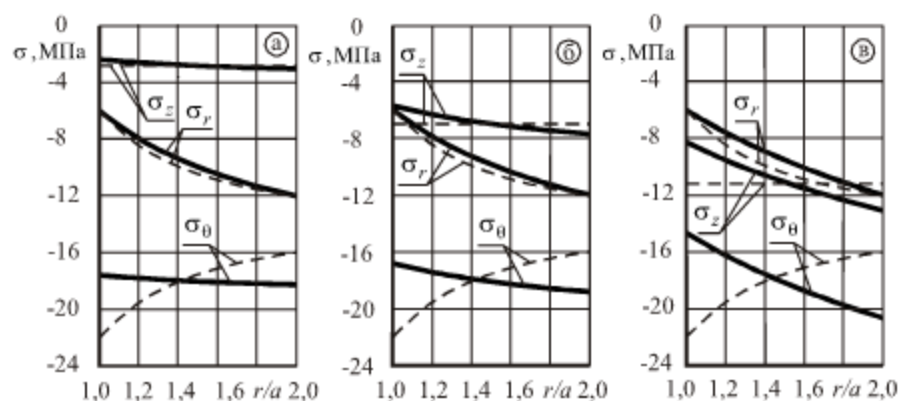


Рис.2.10. Распределение напряжений в равнонапряженном цилиндре. Обозначения такие же как на рис.2.2

рис. 2.10, можно сделать вывод, что величина коэффициента Пуассона оказывает значительное влияние на характер распределения напряжений.

2.3.2. Решение для сферы

При действии в окружном направлении растягивающих напряжений главные напряжения определяются следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\theta = \sigma_\phi$, а $\sigma_3 = \sigma_r$. С учетом этого условие равнонапряженности запишется в виде: $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 = \text{const}$. Подставляя в уравнение равновесия (1.4) выражение $\sigma_\theta = \sigma_r + \sigma_0$, получим

$$\sigma'_r = 2 \frac{\sigma_0}{r}. \quad (2.37)$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$\sigma_r = 2\sigma_0 \ln r + A. \quad (2.38)$$

Определяя константы A и σ_0 из граничных условий (2.4), получим

$$A = \frac{p_b \ln a - p_a \ln b}{\ln b - \ln a}; \quad \sigma_0 = \frac{p_a - p_b}{2(\ln b - \ln a)}. \quad (2.39)$$

Подставляя (2.38) в уравнение (1.15) с коэффициентами (1.19), приходим к дифференциальному уравнению:

$$E' - \frac{6\sigma_0}{r[2\sigma_0(1+k \cdot \ln r) + A \cdot k]} \cdot E = 0. \quad (2.40)$$

Разделив переменные в уравнении (2.40) и проинтегрировав левую и правую части с использованием начального условия ($r = a$; $E = E_0$) и выражений для констант A и σ_0 , находим зависимость $E(r)$:

$$E(r) = E_0 \left[\frac{(p_a - p_b)(1 + k \ln r) + k(p_b \ln a - p_a \ln b)}{(p_a - p_b)(1 + k \ln a) + k(p_b \ln a - p_a \ln b)} \right]^{\frac{3}{k}} \quad (2.41)$$

Аналогичное решение получается, если в окружном направлении действуют сжимающие напряжения.

На рис.2.11 представлены графики зависимости $E(r)$, вычисленные при значениях $\nu_1 = 0,1$; $\nu_2 = 0,25$; $\nu_3 = 0,4$; $b/a = 1,5$; $p_a = 6$ МПа; $p_b = 12$ МПа. Параметр $k = 2(1 - 2\nu_j)/(1 - \nu_j)$ соответствует центрально-симметричной задаче.

Как видно из рис.2.11, влияние коэффициента Пуассона на характер функции $E(r)$ невелико. На рис.2.12 представлено распределение напряжений σ_r и $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ для описанных выше условий для неоднородной конструкции, а также распределение указанных выше

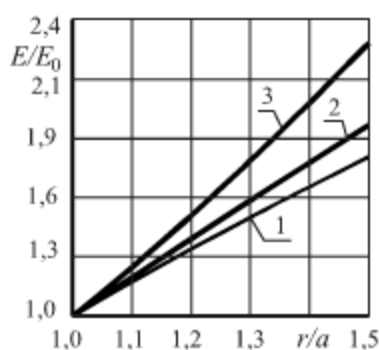


Рис.2.11. Распределение модуля упругости в равнонапряженной сфере. Обозначения такие же, как на рис.2.1

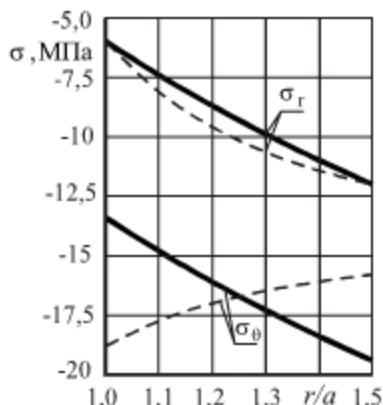


Рис.2.12. Распределение напряжений в равнопрочной сфере. Обозначения такие же, как на рис.2.4

напряжений в аналогичных условиях для однородной конструкции. Поскольку выражение (2.38) и константы (2.39) не содержат ни коэффициент k , ни коэффициент Пуассона ν , распределение напряжений в сфере не зависит от коэффициента Пуассона.

2.4. Энергетическая теория прочности

2.4.1. Решение для цилиндра (диска)

Четвертая теория прочности в системе координат σ_1 , σ_2 и σ_3 представляет поверхность кругового цилиндра

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_0^2. \quad (2.42)$$

Поэтому в зависимости от того, какую конструкцию (диск или цилиндр) рассчитывают, конфигурация поверхности, определяющей прочность материала конструкции, будет меняться. Поэтому чтобы наиболее полно представить всю картину целесообразно рассмотреть отдельно расчет диска и цилиндра.

Если при определенных граничных условиях диск находится в состоянии сжатия, главные напряжения определяются следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_z = 0$, $\sigma_2 = \sigma_r$ и $\sigma_3 = \sigma_\theta$. При этом условие равнонапряженности (2.42) приводится к виду

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_0^2 = const. \quad (2.43)$$

Уравнение (2.43) описывает эллипс, поэтому явную простую зависимость напряжения σ_θ от напряжения σ_r получить не удастся. Для решения данной задачи будем использовать параметрическое задание функций напряжений σ_r и σ_θ :

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_0 \left(\sin \varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi \right), \\ \sigma_\theta = \sigma_0 \left(\sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi \right). \end{cases} \quad (2.44)$$

Подставляя в уравнение равновесия (1.2) выражения (2.44), получим

$$\frac{dr}{d\varphi} - r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) = 0. \quad (2.45)$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$r = A \exp \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \varphi \right) / \sqrt{\cos \varphi}. \quad (2.46)$$

Константы A и σ_0 , а также параметры φ_a и φ_b определяются численно с использованием граничных условий (2.4).

Подставляя функцию напряжения σ_r из (2.44) и выражение для координаты r из (2.46) в разрешающее уравнение (1.15) с учетом (1.16), после преобразований получаем дифференциальное уравнение для определения функции $E(\varphi)$:

$$\frac{dE}{d\varphi} - 2\sqrt{3} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{3k \sin \varphi + (2-k) \cos \varphi}} \cdot E = 0. \quad (2.47)$$

Разделив переменные в уравнении (2.47), после интегрирования с учетом начального условия ($\varphi = \varphi_a$; $E = E_0$), находим зависимость $E(\varphi)$

$$E(\varphi) = C \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2-k}{k^2-k+1} \cdot \varphi\right) \cdot \left[\sqrt{3}k \sin \varphi + (2-k)\cos \varphi\right]^\alpha, \quad (2.48)$$

где $\alpha = 3k/[2(k^2 - k + 1)]$;

$$C = E_0 \left[\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2-k}{k^2-k+1} \cdot \varphi_a\right) \cdot \left(\sqrt{3}k \sin \varphi_a + (2-k)\cos \varphi_a\right)^\alpha \right]^{-1}.$$

Решение задачи оптимизации для цилиндра

Главные напряжения в данном случае определяются равенствами: $\sigma_1 = \sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$, $\sigma_2 = \sigma_r$ и $\sigma_3 = \sigma_\theta$. С учетом этого условие равнонапряженности (2.38) переписывается в виде

$$(1 - \nu + \nu^2)\sigma_r^2 - (1 + 2\nu - 2\nu^2)\sigma_r\sigma_\theta + (1 - \nu + \nu^2)\sigma_\theta^2 = \sigma_0^2 = const. \quad (2.49)$$

Как и в случае, описанном выше, уравнение (2.49) описывает эллипс, поэтому при решении также необходимо использовать параметрическое задание функций напряжений σ_r и σ_θ :

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_0 \left(\frac{2-k}{k} \sin \varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi \right), \\ \sigma_\theta = \sigma_0 \left(\frac{2-k}{k} \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \varphi \right). \end{cases} \quad (2.50)$$

Подставляя в уравнение равновесия (1.2) выражения (2.50), получим

$$\frac{dr}{d\varphi} - r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2-k}{k} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) = 0. \quad (2.51)$$

Решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$r = A \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2-k}{k} \varphi\right) / \sqrt{\cos \varphi} \quad (2.52)$$

Константы A , σ_0 и параметры φ_a , φ_b определяются в общем случае численно, используя граничные условия (2.4).

Подставляя напряжения σ_r из (2.50) и выражение для координаты r из (2.52) в разрешающее уравнение (1.15) с учетом (1.17), после преобразований получаем уравнение для определения распределения модуля упругости $E(\varphi)$:

$$\frac{dE}{d\varphi} - \frac{2\sqrt{3}}{k} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi} \cdot E = 0. \quad (2.53)$$

Проинтегрировав уравнение (2.53) и используя начальное условие ($\varphi = \varphi_a$; $E = E_0$), найдем функцию $E(\varphi)$:

$$E(\varphi) = C \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2k} \varphi\right) (\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)^\alpha, \quad (2.54)$$

где $\alpha = \frac{3}{2k}$; $C = E_0 \left[\exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2k} \varphi_a\right) (\sqrt{3} \sin \varphi_a + \cos \varphi_a)^\alpha \right]^{-1}$.

Учитывая, что параметр k зависит от ν , на основе выражения (2.54), можно исследовать влияние коэффициента Пуассона на характер распределение функции $E(r)$. На рис.2.13 представлены соответствующие зависимости $E(r)$, вычисленные при $\nu_1 = 0,1$; $\nu_2 = 0,25$; $\nu_3 = 0,4$; $b/a = 2$; $p_a = 6$ МПа; $p_b = 12$ МПа. Величина коэффициента k соответствует плоскому деформируемому состоянию: $k = (1 - 2\nu_i)/(1 - \nu_i)$. Как видно из рис.

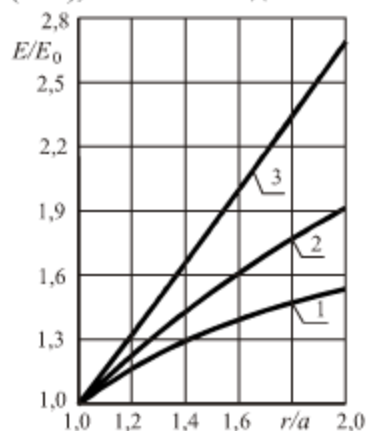


Рис.2.13. Распределение модуля упругости в равнонапряженном цилиндре. Обозначения такие же, как на рис.2.1

2.13, влияние коэффициента Пуассона на характер функции $E(r)$ значительно. На рис.2.14 представлены эпюры напряжений как для неоднородной конструкции, так и в аналогичных условиях для однородной конструкции. Из рис.2.14 видно, что влияние коэффициента Пуассона на характер

распределения напряжений σ_r и σ_θ значительно.

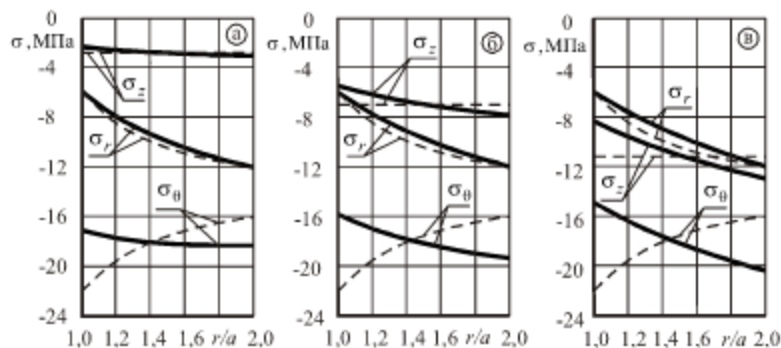


Рис.2.14. Распределение напряжений в равнонапряженном цилиндре. Обозначения такие же как на рис.2.2

2.4.2. Решение для сферы

Главные напряжения в толстостенной сферической оболочке с учетом $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ равны: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_\theta$ и $\sigma_3 = \sigma_r$. С учетом этого условие равнонапряженности (2.42) имеет вид:

$$\sigma_{\max}^2 = \sigma_0^2 = \sigma_r^2 - 2\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \text{const}. \quad (2.55)$$

После преобразования получим: $\sigma_\theta = \sigma_0 - \sigma_r$. Это условие прочности совпадает с теорией прочности наибольших касательных напряжений, поэтому все дальнейшие расчеты также будут совпадать.

Обобщая результаты, полученные во второй главе, можно сделать следующие выводы.

Создание равнонапряженных толстостенных оболочек возможно путем изменения модуля упругости материала. При этом для первой теории прочности величина коэффициента Пуассона не оказывает значительного влияния как на распределение напряжений в цилиндре и сфере, так и на распределение модуля упругости. Для второй, третьей и четвертой теорий прочности в целом влияние коэффициента Пуассона на распределение напряжений и модуля упругости довольно значительно. Такой результат можно объяснить тем, что в этих условиях прочности фигурируют все три нормальных напряжения.

Полученные в этой главе решения можно применить для материалов, для которых справедлива одна из четырех теорий прочности. При этом должна существовать возможность модификации модуля упругости материалов. К таким материалам можно отнести стеклопластики, полимеры и некоторые другие композиты.

Еще раз следует отметить, что приведенные в данной главе решения приводят к созданию моделей **равнонапряженных** конструкций, и если при изменении модуля упругости прочностные свойства материала **не изменяются**, то конструкции будут **равнопрочными**. В большинстве случаев изменение деформационных характеристик путем модификации состава материала приводит и к изменению его прочностных свойств. О способах построения моделей равнопрочных (или близких к равнопрочным) конструкций будет написано в последующих главах.

ГЛАВА 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ РАВНОПРОЧНЫХ ЦИЛИНДРА И СФЕРЫ

Представленные выше решения для толстостенных цилиндрической и сферической оболочек, а также для диска, относятся к так называемым *равнонапряженным* конструкциям, в которых эквивалентное напряжение, соответствующее той или иной теории прочности, постоянно во всем объеме тела. Однако, при решении задачи оптимизации конструкций по прочности условие равнонапряженности недостаточно, поскольку обычно при изменении модуля упругости материала также меняется и его прочность. При этом, как правило, наблюдается закономерность: с увеличением модуля упругости материала увеличивается и его прочность, и наоборот. Поэтому, чтобы согласовать между собой прочностные и деформационные характеристики материала, предлагается следующий подход. Для корреляции прочностных и жёсткостных свойств конкретного материала вводится зависимость $R = f(E)$. Эта функция аппроксимирует экспериментальные данные для выбранного материала. Используя указанную зависимость, решается обратная задача для построения модели *равнопрочной* конструкции. При этом конструкция может не быть равнонапряженной, а условие равнопрочности обеспечивается равенством эквивалентного напряжения в каждой точке тела прочности материала в этой точке. Следует заметить, что рассматриваемый подход можно использовать для материалов, деформационные и прочностные свойства которых можно изменять путем модификации их состава. Это, в первую очередь, композиционные материалы (бетоны, композиты на основе полимеров и др.).

В данной главе рассматривается способ оптимизация работы перечисленных выше конструкций на примере некоторых видов бетонов и осуществляется на основе критерия прочности П.П. Баландина. Это условие прочности хорошо подтверждается экспериментально для бетонов в области всестороннего неравномерного сжатия [16].

3.1. Деформационные свойства бетонов. Методы расчетов на прочность бетонных и железобетонных конструкций

Бетон - сложный многокомпонентный материал. Обычно в состав бетонной смеси входят следующие составляющие: связующее вещество, крупный и мелкий заполнители, минеральные наполнители, а также различные добавки, улучшающие свойства бетона и бетонной смеси. В качестве связующего вещества используются портландцемент, известь, полимерные материалы (различные эмульсии, смолы и т.д.). Крупный заполнитель представляет собой щебень разной крупности. В качестве мелкого заполнителя применяют пески различных фракций. Наполнители представляют собой дисперсные порошки с размерами менее 0,15 мм и удельной поверхностью в пределах 2500 – 5000 см²/г. В качестве добавок в бетон могут применяться как порошки, так и специальные растворы. Более подробную информацию о наполнителях и их влиянии на свойства бетона и бетонных смесей можно найти в работе [8].

Структура бетона в значительной степени влияет на прочность и деформативность материала. Рассмотрим, каким образом она оказывает влияние на указанные свойства, на примере бетона на основе портландцемента. Существенным фактором, оказывающим влияние на структуру бетона, является количество воды, которое используется при приготовлении бетонной смеси, оцениваемое водоцементным отношением В/Ц – отношением взвешенного количества воды к количеству цемента в единице объема бетонной смеси. Для того чтобы произошла химическая реакция цемента с водой, необходимо, чтобы это отношение было В/Ц≈0,2. Но исходя из технологических соображений – для достижения достаточной подвижности и удобоукладываемости бетонной смеси – количество воды берут с некоторым избытком. Этот избыток химически несвязанной воды частично взаимодействует с менее активными частицами цемента, а другая часть заполняет бесчисленные поры и капилляры в цементном камне, полостях между зернами крупного заполнителя. Постепенно вода из пор испаряется. Проведенные исследования структуры бетона позволяют сделать вывод, что объем пор составляет примерно треть объема цементного камня. Поэтому для того чтобы уменьшить пористость цементного камня и соответственно увеличить прочность бетона, необходимо при приготовлении бетонных смесей стремиться к как можно меньшему значению водоцементного отношения.

Все это приводит к образованию сложной неоднородной структуры. Она представляет собой пространственную решетку из цементного камня, которая заполнена зернами песка и щебнем различной крупности и формы, пронизанную большим числом капилляров и микропор, в которых имеется химически несвязанная вода. Поэтому бетон с физической точки зрения представляет капиллярно-пористый материал, в котором

присутствуют все три фазы – твердая, жидкая и газообразная. Цементный камень тоже имеет неоднородную структуру. Он состоит из упругого кристаллического сростка и наполняющей цементный камень вязкой массы – геля.

Все это – изменение водного баланса, уменьшение объема твердеющего геля, рост упругих кристаллов – приводит к тому, что бетон наравне с упругими свойствами одновременно обладает и пластическими свойствами.

Как уже было сказано, бетон – это крайне неоднородный материал и поэтому внешняя нагрузка вызывает в нем сложное напряженное состояние. Если подвергать бетонный образец сжатию, то напряжения будут концентрироваться на частицах, обладающих большим модулем упругости. Следствием этого является то, что по плоскостям соединения этих частиц возникнут усилия, которые будут стремиться нарушить связь между этими частицами. Кроме того, концентрация напряжений будет возникать в зонах, ослабленных порами и пустотами. Результатом всего этого является то, что при осевом сжатии в бетонном образце помимо продольных сжимающих напряжений возникают также поперечные растягивающие напряжения, так называемое вторичное поле напряжений.

Кроме описанных выше особенностей, бетон имеет разное временное сопротивление при растяжении и сжатии.

Для оценки прочности бетона на осевое сжатие используют призмную прочность R_b . Эту величину определяют из опытов на сжатие бетонных призм высотой h и стороной основания a . Для устранения влияния трения на торцах образца и соответственно для стабилизации значения величины призмной прочности R_b отношение высоты образца к стороне основания назначают $h/a = 4$. Подробная информация о методике определения призмной прочности приведена в [18].

Прочность бетона на осевое растяжение зависит от прочности цементного камня на растяжение, а также от сцепления его с зернами заполнителя. На основании опытных данных можно утверждать, что прочность бетона на осевое растяжение примерно в 10 – 20 раз меньше, чем при сжатии. При этом повысить прочность бетона на растяжение можно увеличением расхода цемента, уменьшением отношения В/Ц, а также путем применения щебня с шероховатой поверхностью. Прочность бетона на растяжение определяют, исходя из испытаний на разрыв образцов в виде восьмерки, на раскалывание – образцов в виде цилиндров, на изгиб – бетонных балок. Сведения о методах определения прочности бетона на растяжение можно найти в [19].

Особенностью деформирования бетона является то, что наряду с деформациями, обусловленными силовыми воздействиями, в нем возникают объемные деформации под влиянием усадки бетона, изменения температуры и влажности окружающей среды.

Поведение бетона под действием нагрузки носит нелинейный характер. Даже при самых малых деформациях в нем помимо упругих деформаций, развиваются также и пластические деформации. Упругую часть деформаций характеризуют с помощью начального модуля упругости бетона при сжатии E_b . Также в бетоне развиваются и поперечные деформации. Начальное значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,2$. Под действием увеличивающейся нагрузки значение коэффициента Пуассона меняется. Например, в соответствии с работой [27] при действии на бетон всесторонних сжимающих напряжений величина коэффициента поперечных деформаций приближается к величинам, близким к 0.5, особенно в вершине диаграммы растяжение-сжатие. Методика определения указанных выше деформационных характеристик бетона изложена в [18].

Описанные прочностные и деформационные характеристики бетона зависят от очень большого количества факторов. Усилия отечественных и зарубежных ученых в области бетоноведения направлены на улучшение и оптимизацию этих свойств. Среди русских ученых, работающих в этом направлении, можно назвать Ю.М.Баженова, В.Г.Батракова, Ф.М.Иванова, С.С.Каприелова, А.В.Шейнфельда. Решение вопросов о модификации состава бетона с целью изменения его механических характеристик может определенным образом позволить решить проблему оптимизации работы конструкции. Как показывают решения обратных задач теории упругости неоднородных тел, существует определенная зависимость между прочностными и деформационными характеристиками материала конструкции: при незначительном росте прочности материала наблюдается значительный рост модуля упругости. Бетон с такими качествами описывается в работах [8, 22 – 25]. Это модифицированные цементные бетоны, и описанная выше взаимозависимость прочностных и деформационных свойств обусловлена добавками в бетон микрокремнезема. Приведем основные характеристики таких бетонов (табл. 3.1), ссылаясь на работу [8].

Таблица 3.1

Физико-механические характеристики бетона с добавкой микрокремнезема

№	Кол-во микрокремнезема в бетонной смеси, кг/м ³	Призменная прочность R_b , МПа	Модуль упругости E_b , 10 ⁻⁴ МПа
1	-	42,5	3,62
2	116	44,0	3,01
3	142	38,0	2,16

Из таблицы видно, что с ростом содержания в бетонной смеси микрокремнезема модуль упругости бетона монотонно убывает и при этом относительное изменение значений призменной прочности незначительно по сравнению с изменением модуля упругости.

В качестве второго примера материала, обладающего обозначенными выше свойствами, можно назвать полимербетон на основе фурауроацетоновой смолы ФАМ с минеральным наполнителем в виде кварцевой муки. В табл. 3.2 приводятся данные на основе работы [32]. Из таблицы видно, что прочность материала при степени наполнения полимербетона от 0 до 100 растет незначительно при этом значение модуля упругости увеличивается почти в два раза. Поэтому использование указанных материалов для оптимизации работы конструкции за счет искусственной неоднородности представляется довольно перспективным.

Таблица 3.2

Физико-механические характеристики полимербетона, наполненного кварцевой мукой

№ п.п.	Степень наполнения кварцевой мукой	Предел прочности при сжатии, МПа	Модуль упругости E_b , 10^{-4} МПа
1	-	142	3,10
2	50	146	4,50
3	100	160	7,10
4	200	148	10,5
5	300	132	13,7
6	400	115	16,7

При решении задачи оптимизации работы конструкций на основе критерия образования нормальных трещин в бетоне могут быть использованы экспериментальные данные, опубликованные в статье [33] и приведенные в табл.3.3.

Таблица 3.3

Результаты экспериментальных испытаний цементных бетонов

№ п.п.	Класс бетона	Модуль упругости бетона, E_b , 10^{-4} МПа	Предельная деформация в растянутом бетоне, $\varepsilon_{btu} \times 10^4$
1	B 10	1,60	4,19
2	B 12,5	1,90	4,03
3	B 15	2,05	3,86
4	B 20	2,40	3,59
5	B 25	2,70	3,37
6	B 30	2,90	3,15
7	B 35	3,10	3,00
8	B 40	3,25	2,82
9	B45	3,40	2,72
10	B 50	3,50	2,61

При расчете конструкций, изготовленных из бетона, необходимо знать условия, при которых конструкция теряет несущую способность. Многочисленные эксперименты показали, что классические теории

прочности к бетону в общем случае неприменимы, так как они могут применяться к материалам, одинаково сопротивляющимся и сжатию, и растяжению. Для решения этой проблемы О. Мором было сделано предположение, что главное напряжение σ_2 влияет на прочность материала незначительно, и за критерий прочности принято достижение предельного значения по площадкам $\tau = \tau_{\max}$. При этом на прочность также оказывает влияние нормальное напряжение, действующее по площадке сдвига, и поэтому условие прочности можно записать следующим образом

$$\tau_{\max} = f(\sigma) \quad (3.1)$$

Однако в тех случаях, когда напряжением σ_2 нельзя пренебречь теория Мора в виде (3.1) не подходит. Выражение (3.1) было модифицировано А. Надаи [31], предложившим заменить напряжения τ_{\max} и σ на напряжения, действующее по октаэдрическим площадкам. При этом большинство последующих теорий прочности бетона в той или иной степени укладывается в это соотношение.

Отечественные ученые также оказали влияние на изучение проблемы прочности бетона: П.П.Баландин, Г.А.Гениев, Н.И.Карпенко, В.Н.Киссюк, Л.К.Лукша, Г.А.Тюпин и многие другие. Результаты их исследований можно найти в работах [9, 12, 14 - 17, 26, 27, 28, 30, 37, 39]. Особо следует отметить статьи [15, 16], в которых условие прочности бетона представляет параболоид или гиперболоид вращения, так как при использовании данных критериев довольно просто удается получить решение обратных задач теории упругости неоднородных тел. Следует отметить, что в данной работе рассматривается работа бетона как идеально упругого материала. Таким образом, эту работу можно считать фундаментом для дальнейшего развития расчетов конструкций из бетона с учетом его действительной работы под нагрузкой.

Железобетон — это сложный многокомпонентный материал, в котором бетон монолитно соединен со стальной арматурой. Железобетон в общем случае может армироваться во всех трех ортогональных плоскостях (рис.3.1), при этом величину коэффициентов армирования можно определить следующим образом:

$$\mu_{sx} = \frac{A_x}{a_y a_z}, \quad \mu_{sy} = \frac{A_y}{a_z a_x}, \quad \mu_{sz} = \frac{A_z}{a_x a_y}, \quad (3.2)$$

где a_i — шаг арматуры в i -ом направлении, A_i — площадь арматуры i -ого направления. Очень важно назначить шаг арматуры правильно, так как от этого сильно зависит совместная работа бетона и арматуры.

Железобетон имеет очень сложное поведение под действием нагрузки. В нашей стране изучению данного вопроса посвящены работы

О.Я.Берга, Г.Р.Бидного, В.М.Бондаренко, С.В.Бондаренко, Н.И.Карпенко и многих других [7, 9, 11, 17, 27, 39].

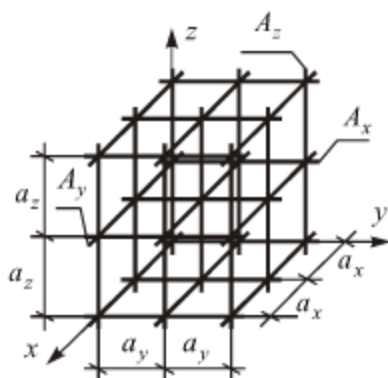


Рис.3.1. Схема ортотропного армирования

Как было отмечено выше, поведение железобетона имеет свои особенности. При постепенном увеличении нагрузки на железобетонные конструкции можно наблюдать три стадии напряженно-деформированного состояния. При этом в массивных конструкциях можно наблюдать все три стадии в различных частях тела конструкции.

На первой стадии при малых нагрузках напряжения в бетоне и арматуре малы и деформации, как правило, носят упругий характер. При увеличении внешней нагрузки в растянутой зоне развиваются пластические деформации, и при этом растягивающие напряжения приближаются к пределу прочности при растяжении. С увеличением нагрузки в растянутом бетоне образуются первые трещины. На этом заканчивается первая стадия.

При наступлении второй стадии в зоне образования трещин растягивающее усилие воспринимает арматура, а также участок бетона растянутой зоны между трещинами. При последующем увеличении нагрузки на конструкцию в сжатой зоне бетона начинают развиваться пластические деформации. В конце второй стадии появляются заметные неупругие деформации в арматуре.

При дальнейшем увеличении нагрузки в арматуре напряжения достигают физического предела текучести. Сжимающие напряжения в бетоне под влиянием неравномерно увеличивающихся перемещений и уменьшения площади сжатой зоны бетона достигают значений временного сопротивления сжатию. При этом, если разрушение железобетонного элемента начинается с разрыва арматуры растянутой зоны и заканчивается раздроблением бетона сжатой зоны, то это разрушение имеет пластический характер. Однако если конструкция армирована высокопрочной проволокой с малым относительным удлинением при разрыве, то раздробление бетона сжатой зоны будет происходить одновременно с разрывом арматуры. Такое разрушение конструкции носит хрупкий характер. Все это относится к конструкциям, имеющим такое количество арматуры, которого достаточно для восприятия растяжения. Однако в конструкциях, содержащих избыток армирования, разрушение происходит по бетону сжатой зоны. Кроме того, вторая стадия переходит в третью стадию внезапно. При этом в отличие от нормально армированных конструкций разрушение конструкций с избыточным содержанием арматуры всегда носит хрупкий

характер, и при разрушении прочность растянутой арматуры оказывается недоиспользованной [8, 34].

Как и при расчете других конструкций, для железобетонных конструкций исторически сложились три метода: метод расчета по допускаемым напряжениям, метод расчета по разрушающим усилиям и метод расчета по предельным состояниям. В силу специфических особенностей железобетона эти методы приобретают дополнительные особенности.

В основу метода расчета по допускаемым напряжениям взята вторая стадия напряженно-деформированного состояния. Кроме того, приняты допущения: бетон растянутой зоны не работает, а растягивающие напряжения воспринимаются арматурой; работа бетона сжатой зоны упругая и зависимость между напряжениями и деформациями принимается линейной и описывается законом Гука; а также принимается гипотеза плоских сечений. Главный недостаток данного метода заключается в том, что бетон здесь рассматривается как упругий материал.

Метод расчета по разрушающим усилиям базируется на третьей стадии напряженно-деформированного состояния. Также как и в предыдущем методе, работа бетона растянутой зоны не учитывается. В расчетные формулы вводят предел прочности бетона при сжатии и предел текучести арматуры. Распределение предельных напряжений в сжатой зоне бетона принимается равномерное. Усилие, при котором допускается эксплуатация конструкции, определяют путем деления разрушающего усилия на общий коэффициент запаса прочности. Вместо гипотезы плоских сечений используется принцип пластического разрушения, который впервые был обоснован отечественным ученым А.Ф.Лолейтом. Суть этого принципа состоит в том, что напряжения в бетоне и арматуре достигают предельных величин одновременно. Все эти допущения способствуют тому, что метод расчета по разрушающим усилиям более адекватно отражает реальную работу конструкции под нагрузкой. Но при этом и у этого метода имеются недостатки. Главный недостаток его заключается в том, что один общий коэффициент запаса прочности не может явно учесть возможные отклонения фактических нагрузок и механических свойств материала.

Метод расчета по предельным состояниям, так же как и предыдущий метод, основывается на третьей стадии напряженно-деформированного состояния и является в своем роде модификацией метода расчета по разрушающим нагрузкам. По этому методу четко разграничиваются предельные состояния конструкций, а также используется система расчетных коэффициентов. Введение этих коэффициентов гарантирует, что предельное состояние не наступит при самых невыгодных сочетаниях нагрузок при наименьших значениях прочностных характеристик материалов.

3.2. Решение задачи оптимизации работы конструкции на основе критерия прочности П.П.Баландина

На основании статьи [16] условие прочности П.П.Баландина в системе координат σ_1 , σ_2 и σ_3 представляет поверхность параболоида вращения. С учетом того, что сжимающие напряжения входят в него со знаком минус это выражение записывается следующим образом:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + (R_b - R_{bt})(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = R_b R_{bt}, \quad (3.3)$$

где R_b – расчетное сопротивление бетона при осевом сжатии (призменная прочность), R_{bt} – расчетное сопротивление бетона при осевом растяжении. Поскольку бетоны плохо работают на растяжение, то можно принять положить в (3.3) $R_{bt} = 0$. Применение данного положения значительно упрощает решение задачи оптимизации. С учетом этого упрощения выражение (3.3) переписывается в виде:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + R_b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0. \quad (3.4)$$

3.2.1. Решение для цилиндра

В бетоне, как следует из работы Н.И.Карпенко [27], при достижении предельного состояния при действии сжимающих напряжений коэффициент Пуассона может достигать значений, близких к 0,5. Поэтому для дальнейших расчетов примем $\nu = 0,5$. Предполагая, что цилиндр находится в условиях плоской деформации, главные напряжения можно определить следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_2 = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$, $\sigma_2 = \sigma_r$ и $\sigma_3 = \sigma_\theta$. С учетом этого условие прочности (3.4) примет вид:

$$0.75(\sigma_r)^2 - 1.5\sigma_r\sigma_\theta + 0.75(\sigma_\theta)^2 + 1.5R_b(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) описывает параболу в неявном виде, поэтому для решения необходимо перейти к параметрическому заданию напряжений σ_r и σ_θ [21, 38]:

$$\begin{cases} \sigma_r = -R_b(-0.5\varphi + 0.25\varphi^2), \\ \sigma_\theta = -R_b(0.5\varphi + 0.25\varphi^2). \end{cases} \quad (3.6)$$

Зависимость между прочностными и жесткостными свойствами материала задается выражением

$$R_b = \rho + \omega E_b, \quad (3.7)$$

где коэффициенты ρ и ω определяются на основе экспериментальных данных. Для их определения можно воспользоваться стандартными функциями математического пакета MathCAD 13.

При решении задачи воспользуемся тем условием, что коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$. Из этого следует, что в условиях плоского деформированного состояния

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta. \quad (3.8)$$

Подставляя выражение (3.8) в условие совместности деформаций (1.6), получим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + 2 \frac{\varepsilon_\theta}{r} = 0, \quad (3.9)$$

которое решается путём разделения переменных с последующим интегрированием левой и правой части уравнения.

Решением уравнения (3.9) будет выражение

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_0}{r^2}, \quad (3.10)$$

где ε_0 пока неизвестная величина.

Для получения зависимости модуля упругости бетона E_b от радиуса воспользуемся выражением для деформаций ε_θ в условиях плоского деформированного состояния

$$\varepsilon_\theta = \frac{1-\nu^2}{E_b} \cdot \left[-\frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r + \sigma_\theta \right]. \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.11) $\nu = 0,5$, а также выражения (3.10), (3.6) и (3.7), после преобразований получаем

$$E_b = -\frac{0.75\rho \cdot \varphi \cdot r^2(\varphi)}{\varepsilon_0 + 0.75\omega \cdot \varphi \cdot r^2(\varphi)}. \quad (3.12)$$

После подстановки (3.7) и (3.12) в (3.6) найдем выражения для напряжений через параметр φ :

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{\rho\varepsilon_0(-0.5\varphi + 0.25\varphi^2)}{\varepsilon_0 + 0.75\omega \cdot \varphi \cdot r^2(\varphi)}; \\ \sigma_\theta = -\frac{\rho\varepsilon_0(0.5\varphi + 0.25\varphi^2)}{\varepsilon_0 + 0.75\omega \cdot \varphi \cdot r^2(\varphi)}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Подставляя (3.13) в уравнение равновесия (1.2), после преобразований приходим к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{3\omega\varphi^2 r^3 + 8\varepsilon_0 r(\varphi - 1)}{2(3\omega\varphi^3 r^2 + 8\varepsilon_0 \varphi)}, \quad (3.14)$$

где ε_0 – константа, пропорциональная относительной деформации ε_θ в точке $r = a$, которая определяется выражением

$$\varepsilon_0 = -\frac{0.75R_b^{(0)}}{E_b^{(0)}}\varphi_a a^2. \quad (3.14,а)$$

Здесь φ_a , $R_b^{(0)}$ и $E_b^{(0)}$ – начальные (в точке $r = a$) значения параметра φ , расчетного сопротивления на сжатие и модуля упругости бетона. Последнее равенство получено с помощью подстановки в (3.11) следующих величин:

$$\nu = 0.5, \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_0}{a^2}, E_b = E_b^{(0)}, \quad (3.14,б)$$

$$\sigma_r = -R_b^{(0)}(-0.5\varphi_a + 0.25\varphi_a^2), \quad \sigma_\theta = -R_b^{(0)}(0.5\varphi_a + 0.25\varphi_a^2).$$

Уравнение (3.14) в общем случае решается численными методами. Приведенные ниже результаты получены методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

3.2.2. Решение для сферы

Главные напряжения при центральной симметрии задачи определяются следующим образом: $\sigma_1 = \sigma_r$ и $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_\theta$. С учетом этого условие прочности (3.4) переписывается следующим образом:

$$(\sigma_r)^2 - 2\sigma_r\sigma_\theta + (\sigma_\theta)^2 + R_b(\sigma_r + 2\sigma_\theta) = 0. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) описывает параболу в неявном виде, поэтому, как и в предыдущем разделе, перейдем к параметрическому заданию напряжений σ_r и σ_θ [21, 38]:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{R_b}{12} (-5 + 12\varphi - 4\varphi^2), \\ \sigma_\theta = \frac{R_b}{12} (1 - 4\varphi^2). \end{cases} \quad (3.16)$$

Зависимость между прочностными и жесткостными свойствами материала, как и для цилиндра, задается выражением (3.7).

При решении задачи воспользуемся тем условием, что при приближении на диаграмме $\sigma - \varepsilon$ к верхней точке коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$ [27]. Так как в центрально-симметричной задаче $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$, то

$$\varepsilon_r = -2\varepsilon_\theta. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в условие совместности деформаций (1.6), получим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + 3 \frac{\varepsilon_\theta}{r} = 0, \quad (3.18)$$

которое решается путём разделения переменных с последующим интегрированием левой и правой частей уравнения.

Решением уравнения (3.18) будет выражение

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_0}{r^3}, \quad (3.19)$$

где ε_0 пока неизвестная величина.

Для получения зависимости модуля упругости бетона E_b от радиуса

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_b} \cdot [(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r]. \quad (3.20)$$

воспользуемся выражением для деформаций ε_θ

Подставив в (3.20) значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$, выражения (3.19), (3.16) и (3.7), после преобразований получаем

$$E_b = \frac{\rho(1 - 2\varphi)r^3(\varphi)}{4\varepsilon_0 - \omega(1 - 2\varphi) \cdot r^3(\varphi)}. \quad (3.21)$$

Подставляя выражение (3.7) и (3.21) в (3.16), получим выражения для напряжений через параметр φ :

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\rho \varepsilon_0 (-5 + 12\varphi - 4\varphi^2)}{3(4\varepsilon_0 - \omega(1 - 2\varphi) \cdot r^3(\varphi))}; \\ \sigma_\theta = \frac{\rho \varepsilon_0 (1 - 4\varphi^2)}{3(4\varepsilon_0 - \omega(1 - 2\varphi) \cdot r^3(\varphi))}. \end{cases} \quad (3.22)$$

После подстановки (3.22) в уравнение равновесия (1.4) после преобразований приходим к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8\varepsilon_0(3 - 2\varphi)r - \omega(1 - 2\varphi)^2 r^4}{(1 - 2\varphi)(16\varepsilon_0 + \omega(1 - 2\varphi)^2 r^3)}, \quad (3.23)$$

где ε_0 - постоянная, определяемая выражением

$$\varepsilon_0 = \frac{R_b^{(0)}}{4E_b^{(0)}} (1 - 2\varphi_a) a^3. \quad (3.23, a)$$

Здесь φ_a , $R_b^{(0)}$ и $E_b^{(0)}$ - начальные (в точке $r = a$) значения параметра φ , расчетного сопротивления на сжатие и модуля упругости бетона. Равенство (3.23, a) получено путем подстановки в (3.20) следующих величин:

$$\begin{aligned} \nu &= 0.5, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_0}{a^3}, \quad E_b = E_b^{(0)}, \\ \sigma_r &= \frac{R_b^{(0)}}{12} (-5 + 12\varphi_a - 4\varphi_a^2), \quad \sigma_\theta = \frac{R_b^{(0)}}{12} (1 - 4\varphi_a^2) \end{aligned} \quad (3.23, b)$$

Для решения уравнения (3.23) воспользовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

3.2.3. Полимербетон. Примеры решения

Ниже представлены конкретные решения для толстостенного цилиндра и сферической оболочки по приведенным выше методикам на основании опытных данных В.В.Патуурова [32].

Решение для цилиндра

Ниже приводятся результаты расчета, проведенного при следующих исходных данных: $E_b^{(0)} = 3.1 \times 10^4$ МПа; $R_b^{(0)} = 141.0$ МПа; $b/a = 1.6$, $p_a/p_b = 1.5$, $\nu = 0.5$. Для определения коэффициентов, входящих в уравнение (3.7), применены стандартные функции математического

пакета MathCAD 13, в результате чего получены следующие значения: $\rho = 126.7$ МПа и $\omega = 4.6 \cdot 10^{-4}$ для первых трех позиций табл.3.2. На рис.3.2 показана аппроксимирующая зависимость для полимербетона, а также экспериментальные точки, по которым она построена.

Решение уравнения (3.14) получено методом Рунге-Кутты четвертого порядка при начальном значении аргумента $\varphi_a = -3.071$. Конечное значение аргумента $\varphi_b = -2.222$.

Величины давлений на цилиндр $p_a = 549.1$ МПа и $p_b = 366.0$ МПа соответственно. Значение давления p_a получено следующим образом. В выражение для нормального радиального напряжения из (3.13) подставляем значения констант ρ и ω , значение параметра $\varphi = \varphi_a$, а также значение $r = a$. В результате получаем $\sigma_r = -549.1$ МПа. Используя первое из соотношений (2.4) находим указанное выше значение p_a . Значение давления p_b можно получить, используя заданное соотношение $p_a/p_b = 1.5$. Графики распределения модуля упругости $E(r)$ и расчетного сопротивления $R_b(r)$ представлены на рис.3.3 и 3.4

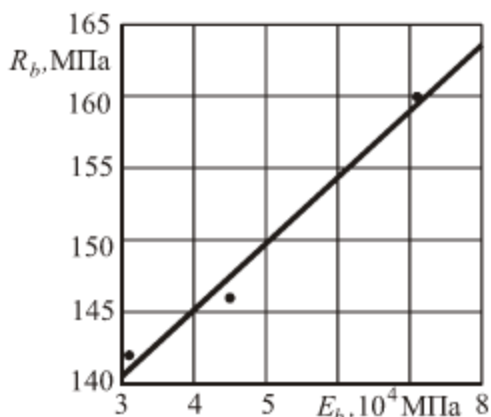


Рис.3.2. Зависимость между прочностными и деформационными характеристиками полимербетона

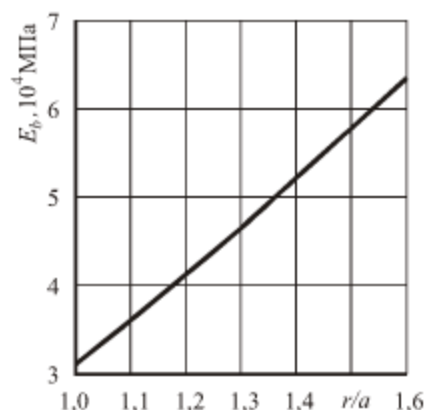


Рис.3.3. Распределение модуля упругости полимербетона в равнопрочном цилиндре

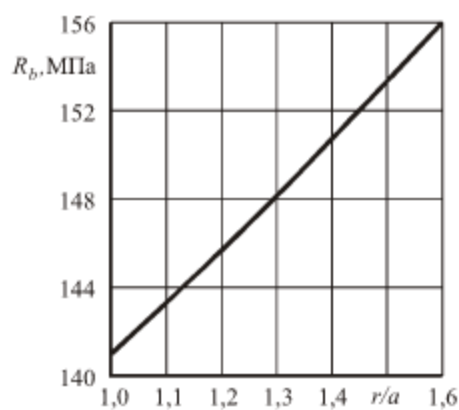


Рис.3.4. Распределение расчетного сопротивления полимербетона в равнопрочном цилиндре

соответственно, а распределение напряжений σ_r , σ_θ и σ_z – на рис.3.5.

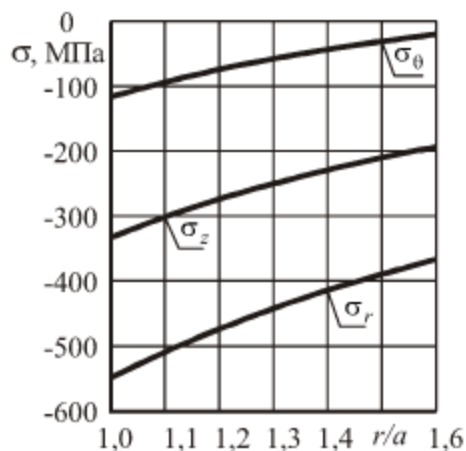


Рис.3.5. Распределение напряжений σ_r , σ_θ и σ_z в полимербетонном равнопрочном цилиндре

в точке, где $r = a$; $s_\theta = (b^2 + a^2 - 2b^2(p_b/p_a)) / (b^2 - a^2)$. Выражение (3.24) получено следующим образом. Напряжения в однородном цилиндре представляем

$$\sigma_r = p_a^{odn} s_r; \quad \sigma_\theta = p_a^{odn} s_\theta, \quad (3.24,а)$$

где функции напряжений s_r и s_θ получены из решения задачи Ляме для толстостенного цилиндра при граничных условиях:

$$\begin{aligned} r = a \quad s_r &= -1, \\ r = b \quad s_\theta &= -d. \end{aligned} \quad (3.24,б)$$

Здесь d – отношение величины внешнего давления p_b^{odn} к величине внутреннего давления p_a^{odn} . Величина расчетного сопротивления принимается постоянной

$$R_b = R_b^{(0)}, \quad (3.24,в)$$

После подстановки выражений (3.24,а) и (3.24,в) в уравнение (3.5) из полученного соотношения можно найти величину давления p_a^{odn} .

Расчет по формуле (3.24) дает значение давления $p_a^{odn} = 213.5$ МПа. Выше была определена величина предельной нагрузки для равнопрочной конструкции $p_a = 549.1$ МПа. Чтобы определить здесь и в дальнейшем эффект оптимизированной модели равнопрочной неоднородной конст-

Полученную нагрузку на равнопрочный цилиндр можно сравнить с нагрузкой для однородной конструкции. По условию (3.5) наибольшее эквивалентное напряжение достигается у внутренней поверхности цилиндра. Для однородной конструкции величину внутреннего давления p_a^{odn} можно найти по формуле

$$p_a^{odn} = -\frac{2R_b^{(0)}(s_r + s_\theta)}{(s_r - s_\theta)^2}, \quad (3.24)$$

где $s_r = -1$, $R_b^{(0)}$ – значение расчетного сопротивления полимербетона на сжатие в

рукции, введем коэффициент эффективности $\beta = p_a / p_a^{odn}$, указывающий, во сколько раз могут быть увеличены внешние нагрузки на тело по сравнению с однородным аналогом. Для рассмотренного в данном разделе равнопрочного цилиндра $\beta = 2.57$.

Используя описанный метод, было исследовано влияние величины отношения p_a/p_b на величину коэффициента эффективности работы равнопрочного цилиндра. Результат этих расчетов представлен на рис.3.6. Анализируя этот рисунок можно сделать вывод, что с увеличением отношения p_a/p_b коэффициент эффективности работы равнопрочного цилиндра β увеличивается очень незначительно, оставаясь близким к постоянному значению. Отсюда можно сделать вывод, что эффект оптимизации рассмотренной конструкции путем использования неоднородного материала практически не зависит от соотношения действующих нагрузок.

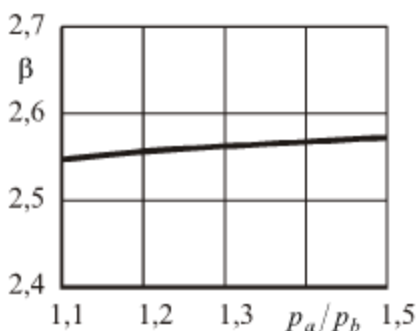


Рис.3.6. Влияние отношения p_a/p_b на величину коэффициента эффективности работы равнопрочного цилиндра

Решение для сферы

Решение задачи оптимизации для толстостенной сферы получено при следующих исходных данных: $E_b^{(0)} = 3.1 \times 10^4$ МПа; $R_b^{(0)} = 141.0$ МПа; $b/a = 1.3$; $p_a/p_b = 1.5$; $\nu = 0.5$. Величина коэффициентов $\rho = 126.7$ МПа и $\omega = 4.6 \cdot 10^{-4}$ определялась так же, как и при расчете равнопрочного цилиндра.

Решение уравнения (3.23) было получено методом Рунге-Кутты четвертого порядка при начальном значении аргумента $\varphi_a = -1.69$. Конечное значение аргумента $\varphi_b = -1.09$. Величины давлений на сферу $p_a = 431.4$ МПа и $p_b = 287.5$ МПа соответственно. Подставив в (3.22) значения констант ρ и ω , параметра $\varphi = \varphi_a$, а также $r = a$, получим напряжение $\sigma_r = -431.4$ МПа. Используя первое из соотношений (2.4), находим указанное выше значение p_a . Значение давления p_b можно получить, используя соотношение $p_b = p_a d$, где $d = 1/1.5$ – отношение величины внешнего давления p_b к величине внутреннего давления p_a . Графики распределения модуля упругости $E(r)$ и расчетного

сопротивления $R_b(r)$ представлены на рис.3.7 и 3.8 соответственно, а эпюры напряжений σ_r и σ_θ – на рис.3.9.

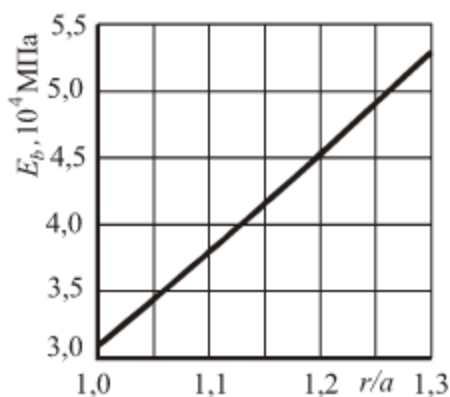


Рис.3.7. Распределение модуля упругости полимербетона в равнопрочной сфере

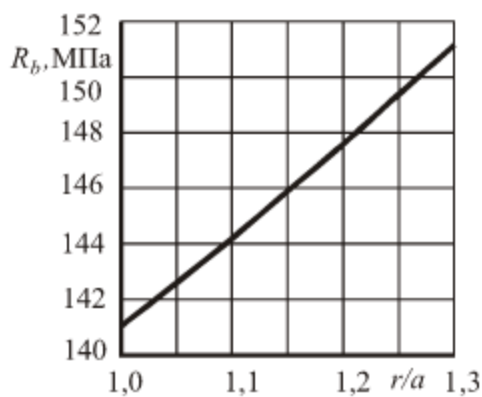


Рис.3.8. Распределение расчетного сопротивления полимербетона в равнопрочной сфере

Полученную предельную нагрузку на сферу можно сравнить с нагрузкой для однородной конструкции. По условию (3.15) наибольшее эквивалентное напряжение достигается у внутренней поверхности сферы. Для однородной конструкции величину внутреннего давления p_a^{odn} можно найти по формуле

$$p_a^{odn} = - \frac{R_b^{(0)} \cdot (s_r + 2s_\theta)}{(s_r - s_\theta)^2}, \quad (3.25)$$

где $s_r = -1$, $s_\theta = (b^3 + 2a^3 - 3b^3 p_b / p_a) / 2(b^3 - a^3)$, $R_b^{(0)}$ – значение расчетного сопротивления полимербетона на сжатие в точке $r = a$. Выражение (3.25) получено аналогично (3.24). Напряжения в однородном цилиндре представляем в виде

$$\sigma_r = p_a^{odn} s_r, \quad \sigma_\theta = p_a^{odn} s_\theta, \quad (3.25,a)$$

где функции s_r и s_θ получены из решения задачи Ляме для толстостенной сферической оболочки при следующих граничных условиях

$$r = a \quad s_r = -1; \quad r = b \quad s_\theta = -d. \quad (3.25,б)$$

Здесь d – отношение величины внешнего давления p_b^{odn} к величине внутреннего давления p_a^{odn} . Величина расчетного сопротивления принимается постоянной:

$$R_b = R_b^{(0)}. \quad (3.25,в)$$

Подставляя выражения (3.25,а) и (3.25,в) в уравнение (3.15), из полученного уравнения выражаем величину давления p_a^{odn} .

Расчет по формуле (3.25) дает значение давления $p_a^{odn} = 195,0$ МПа. Выше была определена величина нагрузки для равнопрочной сферы $p_a = 431,4$ МПа. Таким образом, коэффициент эффективности работы равнопрочной сферы по сравнению с однородной составляет $\beta = 2,21$.

Анализ влияния отношения p_a/p_b на величину β показал, что, как и в случае построения модели равнопрочного цилиндра, это влияние невелико. При изменении отношения p_a/p_b в пределах $1,1 \div 1,5$ коэффициент эффективности β изменяется не более, чем на 5%.

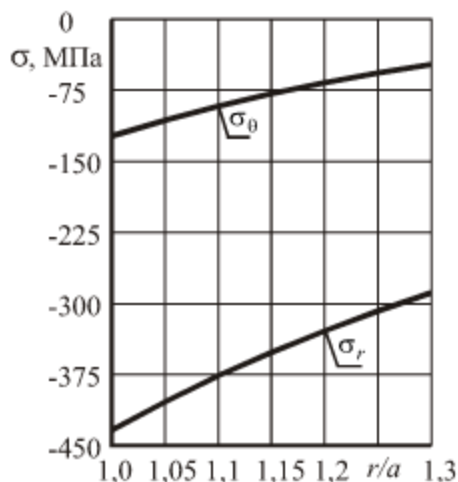


Рис.3.9. Эпюры напряжений σ_r и $\sigma_\theta = \sigma_\phi$ в полимербетонной равнопрочной сфере

3.3. Метод практической реализации путем создания кусочно-однородных конструкций. Примеры

Создание конструкций, материал которых имеет непрерывно изменяющиеся физико-механические характеристики, чрезвычайно сложно. Попытка создания такой конструкции из полимера ЭДТ-1, наполненного стеклянным порошком разных фракций, была описана в работе [40]. Однако, при центрифугировании заготовки в процессе отверждения полимера получился цилиндр, состоящий из двух слоев. При этом внутренний слой состоял практически из чистой смолы, а внешний – из наполненного полимера. Возможно, такие попытки могут быть продолжены при использовании других материалов и другой технологии получения конструкций с непрерывной неоднородностью механических характеристик материала. В данной работе предлагается требуемые непре-

рывные зависимости аппроксимировать с помощью кусочно-постоянных функций. Это приводит к решению задач теории упругости для многослойных тел. Ниже представлен расчет кусочно-однородного цилиндра и сферы. Механические характеристики каждого слоя назначаются исходя из решения задачи о равнопрочной конструкции. Полученные таким образом конструкции можно назвать *близкими к равнопрочным*.

3.3.1. Решение для цилиндра

Рассмотрим решение задачи об аппроксимации непрерывной функции модуля упругости бетона, определенной в п. 3.2.3, на примере трехслойного цилиндра. Стенку цилиндра разбиваем на три равные части. Прежде чем получить решение для каждого слоя и для цилиндра в целом, остановимся на способе выбора постоянных значений модуля упругости в каждом слое (мы ограничиваемся назначением только модуля упругости, поскольку он связан однозначной зависимостью (3.7) с расчетным сопротивлением).

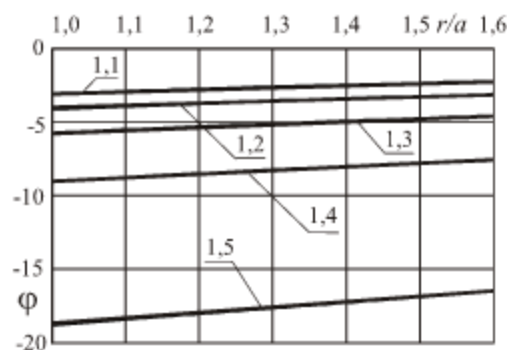


Рис. 3.10 Зависимости $\varphi(r)$ в цилиндре для различных отношений R_b/p_b

На рис. 3.10 приведены зависимости $\varphi(r)$, полученные на основании численного решения уравнения (3.14). Из этих зависимостей можно найти значения параметра φ , соответствующие границам слоев внутри тела конструкции. Подстановка найденных значений φ в (3.12) позволяет определить величину модуля упругости. Значения R_b однозначно связаны с E равенством (3.7).

Таблица 3.4

Физико-механические характеристики материала трехслойного толстостенного цилиндра из полимербетона

№ i -го слоя	Модуль упругости слоя $E_b, 10^4 \text{ МПа}$	Расчетное сопротивление слоя $R_b^i, \text{ МПа}$
1	3.100	141.032
2	4.116	145.716
3	5.205	150.74

Значения E и R_b внутри каждого слоя задаются по его левой границе, так как наибольшее значение напряжения, определяющего прочность материала по критерию П.П.Балаандина, достигается на этой границе слоя. Соответствующие значения механических характеристик слоев приведены в табл. 3.4.

Для каждого **однородного** слоя известно решение задачи Ляме для плоского деформированного состояния [13], содержащее две константы. Считая, что на границах слоев выполняются условия идеального контакта (равенство напряжений σ_r и радиальных перемещений u) для определения шести констант из граничных условий получается система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{C_0}{r_2^2} + C_1 = \frac{C_2}{r_2^2} + C_3; \\ -\frac{1+\nu_1}{E_1 r_2^2} C_0 + \frac{1-\nu_1}{E_1} C_1 = -\frac{1+\nu_1}{E_2 r_2^2} C_2 + \frac{1-\nu_1}{E_2} C_3; \\ \frac{C_2}{r_3^2} + C_3 = \frac{C_4}{r_3^2} + C_5; \\ -\frac{1+\nu_1}{E_2 r_3^2} C_2 + \frac{1-\nu_1}{E_2} C_3 = -\frac{1+\nu_1}{E_3 r_3^2} C_4 + \frac{1-\nu_1}{E_3} C_5; \\ \frac{C_4}{r_4^2} + C_5 = -\frac{1}{1,5}; \\ \frac{C_0}{r_1^2} + C_1 = -1, \end{cases} \quad (3.26)$$

В системе (3.26) константы C_0 и C_1 относятся к первому слою, C_2 и C_3 – ко второму, а C_4 и C_5 – к третьему. Эта система описывает цилиндр, нагруженный относительными нагрузками $\bar{p}_a=1$ и $\bar{p}_b=1/1,5$. Граничные условия в напряжениях представлены первым и третьим уравнением, а условия в перемещениях – вторым и четвертым. Пятое уравнение описывает граничное условие на внешней, а шестое – на внутренней поверхности цилиндра. В системе (3.26) используются обозначения: $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$; r_i – радиусы границ слоев; E_i – определяются по табл. 3.4. Для сопоставления полученного ниже решения с результатами, приведенными в п. 3.2.3, здесь также считается $\nu = 0,5$.

Действующая нагрузка на цилиндр определяется выражением

$$p_a^{(i)} = -2R_b^i \frac{s_r^{(i)} + s_\theta^{(i)}}{(s_r^{(i)} - s_\theta^{(i)})^2}, \quad (3.27)$$

где R_b^i – прочность i -го слоя, определяемая по таблице 3.4, а

$$s_r^{(i)} = \frac{C_{2i-2}}{r_i^2} + C_i, \quad s_\theta^{(i)} = -\frac{C_{2i-2}}{r_i^2} + C_{2i-1}. \quad (3.27,а)$$

Здесь $r_i = a + (b - a)(i - 1)/n$, n – число слоев в цилиндре. Формула (3.27) выведена по аналогии с (3.24). При этом получаемые по формуле (3.27) значения $p_a^{(i)}$ при $i=1$, $i=2$ и $i=3$ будут разными. Как показывают расчеты, наименьшее значение давления $p_a^{(i)}$ получается при расчете третьего слоя $p_a^{(3)} = 391,5$ МПа. Таким образом, величина давления p_a на кусочно-однородный цилиндр принимается равной $p_a^{(3)}$, поскольку при $p_a = p_a^{(1)}$ или $p_a = p_a^{(2)}$ в третьем слое наибольшее эквивалентное напряжение превышает расчетное сопротивление третьего слоя.

Сравним полученную нагрузку на кусочно-однородный цилиндр с нагрузкой для однородной конструкции. Используя равенство (3.24), можно найти величину внутреннего давления: $p_a^{odn} = 213,5$ МПа. Сопоставляя это давление с приведенным выше для кусочно-однородного цилиндра ($p_a = p_a^{(3)} = 391,5$), получим значение коэффициента эффективности $\beta = p_a^{(3)} / p_a^{odn} = 1,83$.

Аналогичным образом можно решить задачу и для цилиндров, состоящих из четырех и пяти слоёв. Ниже приводятся только лишь конечные результаты расчетов.

Четырехслойный цилиндр

Таблица 3.5

Физико-механические характеристики материала четырехслойного толстостенного цилиндра из полимербетона

№ слоя	Модуль упругости слоя $E_b, 10^4$ МПа	Расчетное сопротивление слоя R_b^i , МПа
1	3.100	141.032
2	3.854	144.51
3	4.652	148.19
4	5.487	152.041

Из (3.27) находим наименьшее давление $p_a = p_a^{(4)} = 425$ МПа. Соответствующее давление для однородного цилиндра не зависит от количества слоев и было приведено выше ($p_a^{odn} = 213,5$ МПа). Коэффициент эффективности работы четырехслойного кусочно-однородного цилиндра $\beta = p_a^{(4)} / p_a^{odn} = 1,99$.

Пятислойный цилиндр

Таблица 3.6

Физико-механические характеристики материала пятислойного толстостенного цилиндра из полимербетона

№ слоя	Модуль упругости слоя $E_b, 10^4 \text{ МПа}$	Расчетное сопротивление слоя $R_b^i, \text{ МПа}$
1	3.100	141.032
2	3.699	143.797
3	4.328	146.696
4	4.982	149.712
5	5.658	152.829

Наименьшее давление $p_a = p_a^{(5)} = 446,2$ МПа. Коэффициент эффективности работы пятислойного кусочно-однородного цилиндра $\beta = p_a^{(5)} / p_a^{odn} = 2,09$.

На рис.3.10 и 3.11 показаны эпюры напряжений для трех рассмотренных многослойных цилиндров и графики эквивалентных напряжений.

Анализируя напряженное состояние кусочно-однородных цилиндров

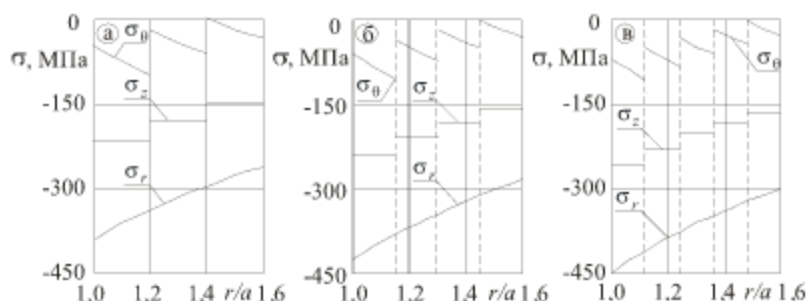


Рис.3.10. Эпюры напряжений в кусочно-однородном полимербетонном цилиндре, разбитом на три (а), четыре (б) и пять (в) слоев

можно сделать следующие выводы. Коэффициент эффективности работы цилиндров зависит от того, на сколько слоев происходит разбиение стенки цилиндра. Чем слоев больше, тем выше этот коэффициент. При этом величина этого коэффициента всегда меньше, чем у цилиндра,

имеющего непрерывную неоднородность. Очевидно, что увеличение количества слоев приближает кусочно-однородный цилиндр к цилиндру с непрерывной неоднородностью.

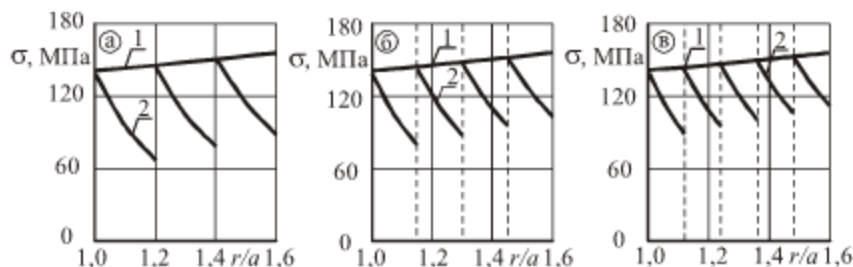


Рис.3.11. Эпюры эквивалентных напряжений в кусочно-однородном полимербетонном цилиндре, разбитом на три (а), четыре (б) и пять (в) слоев: 1 – расчетное сопротивление в равнопрочном цилиндре, имеющем непрерывную неоднородность; 2 – эквивалентные напряжения в цилиндре, имеющем кусочно-постоянную неоднородность.

3.3.2. Решение для сферы

Ход решения задачи об аппроксимации непрерывной функции, описывающей изменение модуля упругости бетона в равнопрочной толстостенной сферической оболочке кусочно-постоянной зависимостью, аналогичен рассмотренному в п. 3.3.1 решению для толстостенного цилиндра.

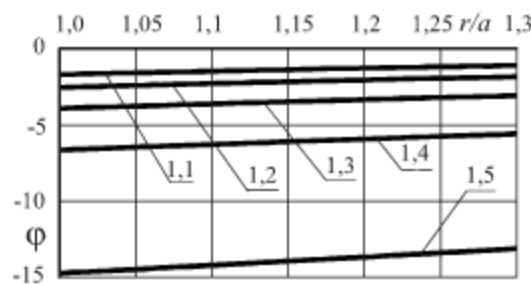


Рис. 3.12 Зависимости $\varphi(r)$ в сфере для различных отношений E_a/E_b

Сначала рассмотрим решение задачи на примере трехслойной сферы. Стенку сферы разбиваем на три равные части. По аналогии с предыдущим разделом рассмотрим способ назначения механических характеристик в слоях. На рис. 3.12 приведены зависимости $\varphi(r)$, полученные на основании численного решения уравнения (3.23).

Из этих зависимостей можно найти значения параметра φ , соответствующие границам слоев. Подстановка найденных значений φ в (3.21) позволяет определить величину модуля упругости, после чего по формуле (3.7) можно найти соответствующие значения расчетного сопротивления в слоях. Значения E и R_b внутри каждого слоя задаются по его левой границе. Соответствующие значения механических характеристик слоев приведены в табл. 3.7.

Физико-механические характеристики материала трехслойной толстостенной сферической оболочки из полимербетона

№ слоя	Модуль упругости слоя $E_b, 10^4 \text{ МПа}$	Расчетное сопротивление слоя $R_b^i, \text{ МПа}$
1	3.100	141.032
2	3.788	144.206
3	4.524	147.599

На основе известного решения о нагружении сферического сосуда постоянными внешним и внутренним давлениями [35] можно определить напряжения σ_r и $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, а также перемещения u . Например, если для первого (внутреннего) слоя обозначить константы интегрирования C_0 и C_1 , то указанные функции в этом слое имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{C_0}{r^3} + C_1, \quad \sigma_\theta = -\frac{C_0}{2r^3} + C_1, \quad u = \frac{r}{E} \left[-\frac{C_0}{2r^3}(1+\nu) + C_1(1-2\nu) \right].$$

Считая, что на границах слоев выполняются условия идеального контакта (равенство напряжений σ_r и радиальных перемещений u) для определения шести констант используется система алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_0}{r_2^3} + C_1 = \frac{C_2}{r_2^3} + C_3; \\ -\frac{1+\nu}{2E_1r_2^3}C_0 + \frac{1-2\nu}{E_1}C_1 = -\frac{1+\nu}{2E_2r_2^3}C_2 + \frac{1-2\nu}{E_2}C_3; \\ \frac{C_2}{r_3^3} + C_3 = \frac{C_4}{r_3^3} + C_5; \\ -\frac{1+\nu}{2E_2r_3^3}C_2 + \frac{1-2\nu}{E_2}C_3 = -\frac{1+\nu}{2E_3r_3^3}C_4 + \frac{1-2\nu}{E_3}C_5; \\ \frac{C_4}{r_4^3} + C_5 = -\frac{1}{1,5}; \\ \frac{C_0}{r_1^3} + C_1 = -1, \end{array} \right. \quad (3.28)$$

где $\nu = 0.5$, $i = 1 \div 3$, а E_i – определяются по табл. 3.7. Граничные условия в напряжениях представлены первым и третьим соотношениями, а условия в перемещениях – вторым и четвертым. Пятое равенство

описывает граничное условие на внешней поверхности цилиндра, а шестое – на внутренней поверхности. При этом считая, по-прежнему, отношение давлений $p_a / p_b = 1,5$, в последние два условия входят относительные нагрузки $\bar{p}_a = 1$ и $\bar{p}_b = 1/1,5$. В системе (3.28) константы C_0 и C_1 относятся к первому слою, C_2 и C_3 – ко второму, а C_4 и C_5 – к третьему.

Действующая нагрузка на сферу определяется выражением

$$p_a^{(i)} = -R_b^i \frac{s_r^{(i)} + 2s_\theta^{(i)}}{(s_r^{(i)} - s_\theta^{(i)})^2}, \quad (3.29)$$

где R_b^i – прочность i -го слоя определяемая по табл.3.7, а

$$s_r^{(i)} = \frac{C_{2i-2}}{r_i^3} + C_i, \quad s_\theta^{(i)} = -\frac{C_{2i-2}}{2r_i^3} + C_{2i-1}. \quad (3.29,a)$$

Здесь $r_i = a + (b-a)(i-1)/n$, а n – число слоев в сфере. Формула (3.29) получена аналогично (3.25). При этом получаемые по формуле (3.29) значения $p_a^{(i)}$ при $i=1$, $i=2$ и $i=3$ будут разными. Как показывают расчеты, наименьшее значение давления $p_a^{(i)}$ получается при расчете третьего слоя $p_a^{(3)} = 326.1$ МПа. Поэтому величина давления p_a на кусочно-однородный цилиндр принимается равной $p_a^{(3)}$, поскольку при $p_a = p_a^{(1)}$ или $p_a = p_a^{(2)}$ в третьем слое возникает напряженное состояние, которое дает наибольшее эквивалентное напряжение, превышающее расчетное сопротивление третьего слоя.

Сравним полученную предельную нагрузку на кусочно-однородную сферу с нагрузкой для однородной конструкции. Для последней величина максимального внутреннего давления p_a , определяемая выражением (3.25), равна $p_a^{odn} = 195.0$. Таким образом, коэффициент эффективности работы кусочно-однородной сферы по сравнению с однородной составляет $\beta = p_a^{(3)} / p_a^{odn} = 1,67$.

Аналогичным образом решается задача для сферы, состоящей из четырех и пяти слоёв. Ниже приводятся только лишь конечные результаты расчетов.

Таблица 3.8

Физико-механические характеристики материала четырёхслойной толстостенной сферической оболочки из полимербетона

№ слоя	Модуль упругости слоя $E_b, 10^4 \text{ МПа}$	Расчетное сопротивление слоя $R_b^i, \text{ МПа}$
1	3.100	141.032
2	3.611	143.391
3	4.151	145.878
4	4.714	148.477

Из (3.29) находим наименьшее давление $p_a = p_a^{(4)} = 349.3 \text{ МПа}$. Соответствующее давление для однородного цилиндра не зависит от количества слоев и было приведено выше ($p_a^{odn} = 195 \text{ МПа}$). Коэффициент эффективности работы четырехслойного кусочно-однородного цилиндра $\beta = p_a^{(4)} / p_a^{odn} = 1,79$.

Пятислойная сферическая оболочка

Из (3.29) находим наименьшее давление $p_a = p_a^{(5)} = 364.3 \text{ МПа}$. Разделив эту величину на соответствующее давление для однородного цилиндра ($p_a^{odn} = 195 \text{ МПа}$), получим $\beta = p_a^{(5)} / p_a^{odn} = 1,87 \text{ МПа}$.

Таблица 3.9

Физико-механические характеристики материала пятислойной толстостенной сферической оболочки из полимербетона

№ слоя	Модуль упругости слоя $E_b, 10^4 \text{ МПа}$	Расчетное сопротивление слоя $R_b^i, \text{ МПа}$
1	3.100	141.032
2	3.507	142.908
3	3.932	144.869
4	4.373	146.905
5	4.83	149.008

На рис.3.12 и 3.13 показаны эпюры напряжений в многослойных сферических оболочках сфер и графики эквивалентных напряжений.

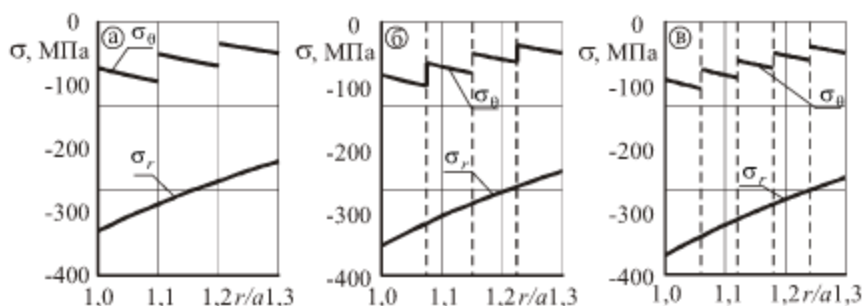


Рис.3.12. Эпюры напряжений в кусочно-однородной полимербетонной сфере, разбитой на три (а), четыре (б) и пять (в) слоев

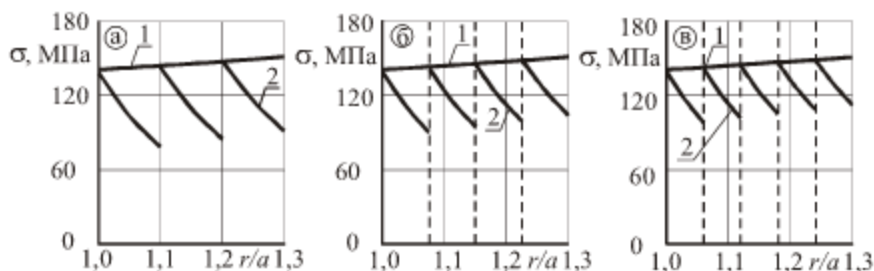


Рис.3.13. Эпюры эквивалентных напряжений в кусочно-однородной полимербетонной сфере, разбитой на три (а), четыре (б) и пять (в) слоев:
 1 – расчетное сопротивление в равнопрочной сфере, имеющей непрерывную неоднородность;
 2 – эквивалентные напряжения в сфере, имеющей кусочно-постоянную неоднородность.

Анализируя напряженное состояние кусочно-однородных сфер, можно сделать вывод, что также, как и у кусочно-однородных цилиндров, коэффициент эффективности работы кусочно-однородной сферической оболочки зависит количества слоев, на которые происходит разбиение стенки оболочки.

ГЛАВА 4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ

В данной главе представлено решение задачи оптимизации работы железобетонного цилиндра без возникновения в материале трещин. При этом под понятием неоднородность понимается изменение модуля упругости бетона вдоль радиуса. Поэтому решение задачи оптимизации заключается именно в подборе распределения характеристик бетона в теле конструкции. При решении задач используются основные идеи представленные в работе Н.И.Карпенко [27].

4.1. Общая модель железобетона. Прямые задачи

Используя физические соотношения (5.44) из работы [27], предварительно заменив в них индексы декартовых координат на индексы цилиндрических координат, получим

$$\begin{cases} \varepsilon_r = c_{b11}^m \sigma_{br}^m + c_{b12}^m \sigma_{b\theta}^m + c_{b13}^m \sigma_{bz}^m, \\ \varepsilon_\theta = c_{b21}^m \sigma_{br}^m + c_{b22}^m \sigma_{b\theta}^m + c_{b23}^m \sigma_{bz}^m, \\ \varepsilon_z = c_{b31}^m \sigma_{br}^m + c_{b32}^m \sigma_{b\theta}^m + c_{b33}^m \sigma_{bz}^m, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $c_{b11}^m = \frac{1}{(1-\mu_{sr})^2} \left[\frac{1-\mu_s}{E_b} + \frac{\mu_{s\theta}}{E_s} + \frac{\mu_{sz}}{E_s} \right]$, $c_{b12}^m = -\frac{\nu}{E_b} \cdot \frac{(1-\mu_s)}{(1-\mu_{sr})(1-\mu_{s\theta})}$, $c_{b13}^m = -\frac{\nu}{E_b} \cdot \frac{(1-\mu_s)}{(1-\mu_{sr})(1-\mu_{sz})}$, $\mu_s = \mu_{sr} + \mu_{s\theta} + \mu_{sz}$, $\sigma_{bj}^m = \sigma_{bj} / (1-\mu_{sj})$ – введенные напряжения в бетоне, а $j = r, \theta, z$. Остальные коэффициенты в системе соотношений (4.1) получаются круговой перестановкой индексов.

В системе (4.1) составляющие коэффициентов c_{bij}^m имеют разный порядок. Например, в c_{b11}^m составляющие $\mu_{s\theta}/E_s$ и μ_{sz}/E_s представляют собой величины меньшего порядка, чем $(1-\mu_s)/E_b$, поэтому при расчете

эти малые величины можно не учитывать. С учетом изложенного выше система (4.1) принимает вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1-\mu_s}{E_b(1-\mu_{sr})} (\sigma_{br} - \nu\sigma_{b\theta} - \nu\sigma_{bz}), \\ \varepsilon_\theta = \frac{1-\mu_s}{E_b(1-\mu_{s\theta})} (-\nu\sigma_{br} + \sigma_{b\theta} - \nu\sigma_{bz}), \\ \varepsilon_z = \frac{1-\mu_s}{E_b(1-\mu_{sz})} (-\nu\sigma_{br} - \nu\sigma_{b\theta} + \sigma_{bz}), \end{cases} \quad (4.2)$$

где σ_{br} , $\sigma_{b\theta}$ и σ_{bz} — действительные напряжения в бетоне.

Обычно при конструировании в цилиндрических трубах устанавливают кольцевую арматуру, а также арматуру, идущую параллельно оси вращения цилиндра, поэтому будем полагать $\mu_{sr} = 0$. Кроме того, труба в общем случае представляет собой тело, имеющее большую протяженность в направлении оси Oz , что позволяет рассматривать напряженно-деформированное состояние трубы в условиях плоской деформации, т.е. в (4.2) можно положить $\varepsilon_z = 0$.

Учитывая приведенные упрощения, окончательно система (4.2) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1-\mu_s}{E_{b1}} (\sigma_{br} - \nu_1\sigma_{b\theta}), \\ \varepsilon_\theta = \frac{1-\mu_s}{E_{b1}(1-\mu_{s\theta})} (-\nu_1\sigma_{br} + \sigma_{b\theta}), \end{cases} \quad (4.3)$$

где $\nu_1 = \nu/(1-\nu)$, $E_{b1} = E_b/(1-\nu^2)$. Из условия $\varepsilon_z = 0$ напряжение σ_{bz} можно определить из равенства:

$$\sigma_{bz} = \nu(\sigma_{br} + \sigma_{b\theta}). \quad (4.4)$$

При решении задач о напряженно-деформированном состоянии необходимо знать, как связываются между собой общие напряжения в железобетоне с напряжениями, действующими в арматуре и бетоне. Ответ на этот вопрос также дается в работе [27]. Эти соотношения при соответствующих заменах выглядят так:

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_{br}(1-\mu_{sr}) + E_s\varepsilon_r\mu_{sr}; \\ \sigma_\theta = \sigma_{b\theta}(1-\mu_{s\theta}) + E_s\varepsilon_\theta\mu_{s\theta}; \\ \sigma_z = \sigma_{bz}(1-\mu_{sz}) + E_s\varepsilon_z\mu_{sz}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Применяя к соотношениям (4.5) указанные выше предположения, получим

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_{br}; \\ \sigma_\theta = \sigma_{b\theta}(1 - \mu_{s\theta}) + E_s \varepsilon_\theta \mu_{s\theta}; \\ \sigma_z = \sigma_{bz}(1 - \mu_{sz}) \end{cases} \quad (4.6)$$

Используя соотношения (4.3) и выражения (4.6), можно решить некоторые прямые задачи. Рассмотрим, каким образом можно получить решение для цилиндра.

Уравнение равновесия (1.2) с учетом (4.6) запишется в виде:

$$r\sigma'_r + \sigma_r - \sigma_{b\theta}(1 - \mu_{s\theta}) - E_s \mu_{s\theta} \varepsilon_\theta = 0. \quad (4.7)$$

Из второго выражения (4.3) определяем действительное напряжение $\sigma_{b\theta}$ в бетоне

$$\sigma_{b\theta} = \nu_1 \sigma_r + E_{b1} \varepsilon_\theta \frac{1 - \mu_{s\theta}}{1 - \mu_s}. \quad (4.8)$$

Под действительными напряжениями в бетоне понимаются напряжения, которые возникают в теле конструкции за вычетом объёма, занимаемого арматурой. Исключив с помощью равенства (4.8) напряжения $\sigma_{b\theta}$ из первого выражения (4.3), получим

$$\varepsilon_r = \left[(1 - \nu_1^2)(1 - \mu_s)\sigma_r - \nu_1 E_{b1} \varepsilon_\theta (1 - \mu_{s\theta}) \right] / E_{b1}. \quad (4.9)$$

Подставляя выражение (4.8) в уравнение равновесия (4.7), а выражение (4.9) в уравнение совместности деформаций (1.4), получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \sigma'_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\varepsilon_\theta [E_{b1}(1 - \mu_{s\theta})^2 + E_s \mu_{s\theta}(1 - \mu_s)] - \sigma_r [1 - \nu_1(1 - \mu_{s\theta})](1 - \mu_s)}{1 - \mu_s}, \\ \varepsilon'_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{(1 - \nu_1^2)(1 - \mu_s)\sigma_r - [1 + \nu_1(1 - \mu_{s\theta})]E_{b1} \varepsilon_\theta}{E_{b1}}. \end{cases} \quad (4.10)$$

В общем случае система (4.10) решается численно, например, когда величина коэффициента армирования $\mu_{s\theta}$ зависит от координаты r , или при переменном модуле упругости E_{b1} .

Рассмотрим решение прямой задачи для железобетонного цилиндра на конкретных примерах. Пусть цилиндр имеет равномерное армирование вдоль кольцевого и осевого направления, т.е. $\mu_{s\theta} = const$ и $\mu_{sz} = const$, а также коэффициент Пуассона $\nu = 0.5$. Модули упругости E_{b1} и E_s также приняты постоянными. При таких условиях удастся получить решение системы (4.10) аналитически. Решением второго уравнения системы (4.10), являющегося однородным линейным дифференциальным уравнением, будет зависимость

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{(1-\mu_s)\sigma_0}{E_{b1}(1-\mu_{s\theta})^2 + E_s\mu_{s\theta}(1-\mu_s)} r^{-2+\mu_{s\theta}}, \quad (4.11)$$

где σ_0 пока неизвестная величина. Подставляя (4.11) в первое уравнение системы (4.10), получим линейное дифференциальное уравнение

$$\sigma_r' + \mu_{s\theta} \frac{\sigma_r}{r} = \sigma_0 r^{-3+\mu_{s\theta}}. \quad (4.12)$$

Решением уравнения (4.12) является функция

$$\sigma_r = -\frac{\sigma_0}{2(1-\mu_{s\theta})} r^{-2+\mu_{s\theta}} + Ar^{-\mu_{s\theta}}. \quad (4.13)$$

Константы A и σ_0 можно определить из граничных условий (2.4). В результате находим

$$A = \frac{p_b b^{2-\mu_{s\theta}} - p_a a^{2-\mu_{s\theta}}}{a^{2(1-\mu_{s\theta})} - b^{2(1-\mu_{s\theta})}}, \quad (4.14)$$

$$\sigma_0 = 2(1-\mu_{s\theta}) \frac{(p_b b^{\mu_{s\theta}} - p_a a^{\mu_{s\theta}})(ba)^{2(1-\mu_{s\theta})}}{a^{2(1-\mu_{s\theta})} - b^{2(1-\mu_{s\theta})}}.$$

Напряжение σ_{θ} определяем из уравнения равновесия (1.2)

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_0}{2} r^{-2+\mu_{s\theta}} + A(1-\mu_s) r^{-\mu_{s\theta}}. \quad (4.15)$$

Напряжения $\sigma_{b\theta}$, σ_{bz} и σ_z можно определить, используя следующие выражения

$$\sigma_{b\theta} = \frac{\sigma_0}{2(1-\mu_{s\theta})} \cdot \frac{E_{b1}(1-\mu_{s\theta})^2 - E_s\mu_{s\theta}(1-\mu_s)}{E_{b1}(1-\mu_{s\theta})^2 + E_s\mu_{s\theta}(1-\mu_s)} r^{-2+\mu_{s\theta}} + Ar^{-\mu_{s\theta}}, \quad (4.16)$$

$$\sigma_{bz} = -\frac{\sigma_0}{2(1-\mu_{s\theta})} \cdot \frac{E_s\mu_{s\theta}(1-\mu_s)}{E_{b1}(1-\mu_{s\theta})^2 + E_s\mu_{s\theta}(1-\mu_s)} r^{-2+\mu_{s\theta}} + Ar^{-\mu_{s\theta}}, \quad (4.17)$$

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_0}{2(1-\mu_{s\theta})} \cdot \frac{E_s\mu_{s\theta}(1-\mu_{sz})(1-\mu_s)}{E_{b1}(1-\mu_{s\theta})^2 + E_s\mu_{s\theta}(1-\mu_s)} r^{-2+\mu_{s\theta}} + A(1-\mu_{sz}) r^{-\mu_{s\theta}}. \quad (4.18)$$

Ниже приводится пример расчета, проведенный при следующих исходных данных: $b/a = 1.3$; $\mu_{s\theta} = 0.01$; $\mu_{sz} = 0.01$; $p_a = 5$ МПа; $p_b = 10$ МПа; $E_b = 2.16 \times 10^4$ МПа; $E_s = 2 \times 10^5$ МПа. На рис.4.1 показано распределение напряжений в железобетонном цилиндре при равномерном кольцевом армировании.

В качестве второго примера можно привести расчет железобетонного цилиндра, имеющего неравномерное кольцевое армирование

$$\mu_{s\theta} = \mu_0 r^\xi, \quad (4.19)$$

а осевое армирование, как и в предыдущем примере равномерное. Модули упругости E_{b1} и E_s приняты постоянными, а коэффициент Пуассона $\nu = 0.5$. Решая второе уравнение системы (4.10) имеем следующую зависимость:

$$\varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \exp\left(\mu_0 \frac{r^\xi}{\xi}\right), \quad (4.20)$$

где ε_0 пока величина неизвестная. Для того чтобы решить первое уравнение системы (4.10), необходимо прибегнуть к численным методам, например, использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Неизвестную константу ε_0 определяют, используя граничные условия (2.4) и метод пристрелки. Эти алгоритмы можно реализовать, используя математический пакет MathCAD 13.

Используя изложенное выше решение для цилиндра с неравномерным кольцевым армированием, был выполнен числовой пример при следующих исходных данных: $b/a = 1.3$; $p_a = 5$ МПа; $p_b = 10$ МПа; $E_b = 2.16 \times 10^4$ МПа; $E_s = 2 \times 10^5$ МПа; $\mu_0 = 0.01$; $\xi = 4.187$; $\mu_{sz} = 0.01$. В табл. 4.1 представлен результат численного решения для указанного примера, при этом $\sigma_{s\theta} = \varepsilon_0 E_s$

Таблица 4.1
Распределение напряжений при неравномерном кольцевом армировании

r/a	$\sigma_r, \text{МПа}$	$\sigma_\theta, \text{МПа}$	$\sigma_z, \text{МПа}$	$\sigma_{s\theta}, \text{МПа}$
1.00	-5.000	-28.620	-16.017	-153.689
1.05	-6.104	-27.781	-16.087	-139.475
1.10	-7.073	-27.087	-16.160	-127.164
1.15	-7.930	-26.513	-16.236	-116.432
1.20	-8.695	-26.040	-16.315	-107.021
1.25	-9.38	-25.653	-16.397	-98.724
1.30	-10.00	-25.338	-16.481	-91.375

На рис.4.1 и 4.2 показано распределение напряжений в железобетонном цилиндре как при равномерном, так и при

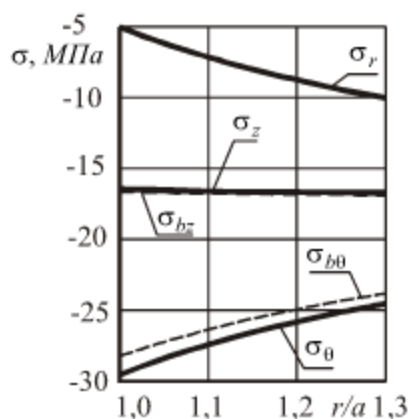


Рис.4.1. Распределение напряжений в железобетонном цилиндре с равномерным кольцевым армированием

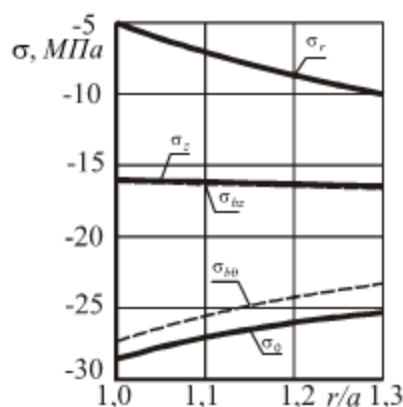


Рис.4.2. Распределение напряжений в железобетонном цилиндре с неравномерным кольцевым армированием

неравномерном кольцевом армировании. На рис.4.3 приведены эпюры распределения коэффициента армирования, а на рис.4.4 эпюра напряжений в кольцевой арматуре.

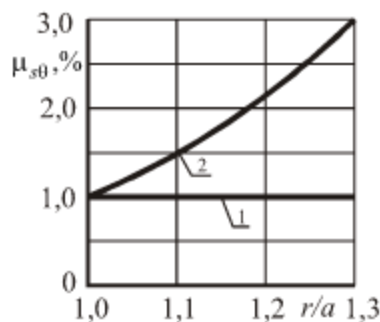


Рис.4.3. Равномерное (1) и неравномерное (2) распределение коэффициента $\mu_{s\theta}$

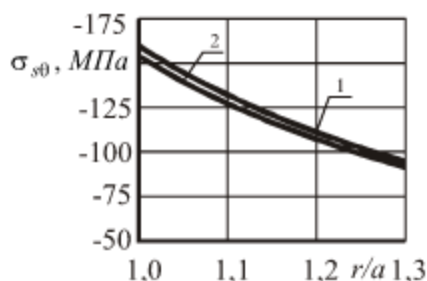


Рис.4.4. Эпюры напряжений в кольцевой арматуре при равномерном (1) и неравномерном (2) кольцевом армировании

Можно заметить, что при изменении плотности кольцевого армирования вдоль радиуса, в пределах от 1% до 3% приводит к общему снижению напряжений в арматуре, однако это снижение незначительно.

4.2. Обратные задачи для равнопрочного цилиндра

На примере решения прямых задач для железобетонного цилиндра стало ясно, что форма решения сильно зависит от того, как армирована конструкция, при этом зачастую решение возможно лишь численными методами. При решении задачи оптимизации будет использовано условие образования нормальных трещин в теле бетона

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{btu}, \quad (4.21)$$

где ε_1 – наибольшая относительная деформация растяжения, ε_{btu} – предельная относительная деформация растяжения бетона; и данные табл.3.3 монографии.

4.2.1. Решение задачи при равномерном кольцевом армировании

При решении обратных задач для железобетонного цилиндра будем исходить из определенных предпосылок. Будем рассматривать такие виды нагружений цилиндра, при которых в нем будут возникать только сжимающие напряжения. При этом в радиальном направлении будут возникать деформации растяжения. Коэффициент Пуассона для расчетов примем $\nu = 0.5$. В выражении (4.21) предельная деформация растяжения определяется выражением

$$\varepsilon_{btu} = \rho \cdot \frac{E_b}{1 - \nu^2} + \omega, \quad (4.22)$$

где коэффициенты ρ и ω определяются на основе экспериментальных данных, приведенных в табл.3.3.

Для определения зависимости между деформациями ε_r и ε_θ воспользуемся системой (4.3). Подставляя в систему значение коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$, после несложных преобразований получим

$$\varepsilon_r = -(1 - \mu_{s\theta}) \varepsilon_\theta. \quad (4.23)$$

Учитывая, что в радиальном направлении возникают растягивающие деформации, условие (4.21) с учетом выражения (4.22) переписывается следующим образом:

$$\varepsilon_r = \rho \cdot \frac{E_b}{1 - \nu^2} + \omega. \quad (4.24)$$

Подставив выражение (4.24) в (4.23), можно получить соотношение

$$E_b = -\left(1 - \nu^2\right) \cdot \frac{\omega + (1 - \mu_{s0})\epsilon_0}{\rho}. \quad (4.25)$$

Подставляя в систему (4.10) значение коэффициента Пуассона $\nu = 0.5$ и выражение (4.25), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sigma'_r = \frac{1}{r} \cdot \left[\epsilon_0 \left(E_s \mu_{s0} - \frac{(1 - \mu_{s0})^2}{1 - \mu_s} \cdot \frac{\omega + (1 - \mu_{s0})\epsilon_0}{\rho} \right) - \mu_{s0} \sigma_r \right], \\ \epsilon'_\theta = -\frac{2 - \mu_{s0}}{r} \epsilon_\theta. \end{cases} \quad (4.26)$$

Приведенные уравнения позволяют получить решение обратной задачи для всевозможных вариантов армирования железобетонного цилиндра. В общем случае (неоднородный материал, неравномерное армирование) систему (4.26) можно решить, используя лишь численные методы, например метод Рунге-Кутты.

При равномерном кольцевом и осевом армировании решение обратной задачи, сводящееся к системе (4.26), удастся получить в аналитической форме. Для этого сначала необходимо решить второе уравнение системы. Полученное решение описывается выражением, аналогичным (4.11):

$$\epsilon_\theta = \frac{\epsilon_0}{r^{2 - \mu_{s0}}}, \quad (4.27)$$

где ϵ_0 пока неизвестная величина. Подставляя выражение (4.27) в первое уравнение системы (4.26), получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\sigma'_r + \frac{\mu_{s0}}{r} \cdot \sigma_r = \frac{\epsilon_0}{r^{3 - \mu_{s0}}} \left[E_s \mu_{s0} - \frac{(1 - \mu_{s0})^2}{1 - \mu_s} \cdot \frac{\omega \cdot r^{2 - \mu_{s0}} + (1 - \mu_{s0})\epsilon_0}{\rho \cdot r^{2 - \mu_{s0}}} \right]. \quad (4.28)$$

Интегралом уравнения (4.28) является функция

$$\begin{aligned} \sigma_r = -\epsilon_0(r) \left[\frac{E_s \mu_{s0}}{2(1 - \mu_{s0})} - \frac{(1 - \mu_{s0})^2}{1 - \mu_s} \cdot \frac{\omega(4 - 3\mu_{s0}) + 2(1 - \mu_{s0})^2 \epsilon_0(r)}{2\rho(1 - \mu_{s0})(4 - 3\mu_{s0})} \right] + \\ + Ar^{-\mu_{s0}}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $\epsilon_0(r)$ – определяется выражением (4.27). Константы A и ϵ_0 в выражениях (4.27) и (4.29) определяются из граничных условий (2.4).

На основе данных табл.3.3 для определения коэффициентов ρ и ω , входящих в равенство (4.22), можно использовать стандартные процедуры математического пакета MathCAD 13, в результате чего получаем

$\rho = -6.35 \times 10^{-9}$ МПа⁻¹ и $\omega = 5.603 \times 10^{-4}$. На рис.4.5 показана аппроксимирующая зависимость вида (4.22), а также экспериментальные данные, по которым она построена.

Можно заметить, что предположение о линейной зависимости между ε_{btu} и E_b достаточно наглядно подтверждается рис. 4.5.

Ниже приводится ход аналитического решения

задачи оптимизации при следующих исходных данных: $E_s = 2 \times 10^5$ МПа, $b/a = 1.3$, $p_b/p_a = 2$, $\mu_{s0} = 0.01$, $\mu_{sz} = 0.01$.

Сначала определим величину ε_0 . Для этого подставим (4.23) и (4.27) в (4.24) и после преобразования приходим к формуле:

$$\varepsilon_0 = -\frac{r^{2-\mu_{s0}}}{1-\mu_{s0}} \cdot \left(\rho \cdot \frac{E_b}{1-\nu^2} + \omega \right). \quad (4.29,а)$$

Подставляя в (4.29,а) найденные значения $\rho = -6.35 \times 10^{-9}$ МПа⁻¹ и $\omega = 5.603 \times 10^{-4}$, а также $E_b = 1.6 \times 10^4$ МПа $\mu_{s0} = 0.01$, $r = a$, $a = 1$, $\nu = 0.5$, получим $\varepsilon_0 = -4.291 \times 10^{-4}$. Для определения значения A необходимо воспользоваться граничными условиями (2.4). Также необходимо учесть, что $p_b = 2p_a$. Используя (4.29) при реализации граничных условий (2.4), после преобразований получаем систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными p_a и A :

$$\begin{cases} p_a + a^{-\mu_{s0}} A = b_0 \\ 2p_a + b^{-\mu_{s0}} A = b_1 \end{cases} \quad (4.29,б)$$

где

$$b_0 = \frac{\varepsilon_0}{a^{2-\mu_{s0}}} \cdot \left\{ \frac{E_s \mu_{s0}}{2(1-\mu_{s0})} - T \cdot \left[\omega(4-3\mu_{s0}) + 2(1-\mu_{s0})^2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{a^{2-\mu_{s0}}} \right] \right\},$$

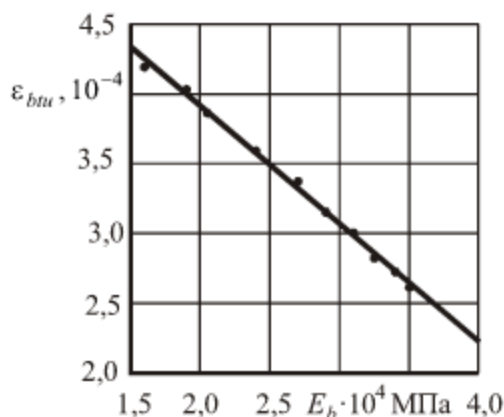


Рис.4.5. Аппроксимирующая зависимость между ε_{btu} и E_b

$$b_1 = \frac{\varepsilon_0}{b^{2-\mu_{s\theta}}} \cdot \left\{ \frac{E_s \mu_{s\theta}}{2(1-\mu_{s\theta})} - T \cdot \left[\omega(4-3\mu_{s\theta}) + 2(1-\mu_{s\theta})^2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{b^{2-\mu_{s\theta}}} \right] \right\}.$$

Здесь введено обозначение:

$$T = \frac{(1-\mu_{s\theta})^2}{2\rho(1-\mu_s)(1-\mu_{s\theta})(4-3\mu_{s\theta})}.$$

Подставляя эти константы в систему (4.29,б), определяем значения p_a и A : $p_a = 3.228$ МПа, а $A = -15.554$. После этого можно вычислить значения напряжений, деформаций и функцию модуля упругости.

Полученные значения давления p_a и начальной деформации ε_0 использовались для численного решения системы (4.26) методом Рунге-Кутты четвертого порядка в качестве начальных параметров:

$$\begin{cases} \sigma_r = -3.228 \text{ МПа,} \\ \varepsilon_0 = -4.291 \times 10^{-4}. \end{cases} \quad (4.30)$$

Результаты численного интегрирования представлены в табл.4.2.

Таблица 4.2

Распределение напряжений и модуля упругости бетона E_b при равномерном кольцевом армировании

r/a	$\sigma_r, \text{ МПа}$	$\sigma_\theta, \text{ МПа}$	$\sigma_z, \text{ МПа}$	$E_b, \text{ МПа}$	$\varepsilon_{s\theta}, \text{ МПа}$
1.00	-3.228	-13.209	-7.773	16000	-85.827
1.05	-3.753	-15.214	-9.075	20640	-77.887
1.10	-4.308	-16.653	-10.104	24670	-70.998
1.15	-4.868	-17.681	-10.926	28180	-64.988
1.20	-5.419	-18.410	-11.588	31270	-59.712
1.25	-5.949	-18.916	-12.128	33990	-55.051
1.30	-6.454	-19.260	-12.570	36410	-50.919

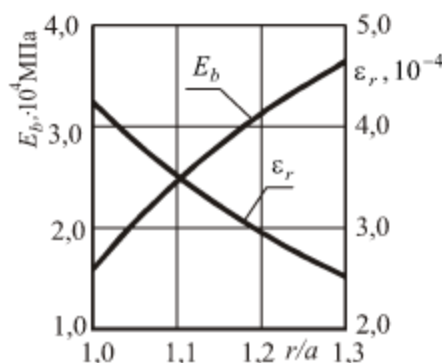


Рис.4.6. Распределение E_b и ε_r в железобетонном цилиндре при равномерном кольцевом армировании

Величины давлений на цилиндр составили $p_a = 3.227$ МПа и $p_b = 6.454$ МПа. Зависимости модуля упругости $E_b(r)$ и растягивающей деформации $\varepsilon_r(r)$ показаны на рис.4.6, а эпюры напряжений σ_r , σ_θ , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_z и σ_{bz} – на рис.4.7. Распределение напряжений в кольцевой арматуре приведено на рис.4.8.

Из рис. 4.7 видно, что эпюры напряжений σ_z и σ_{bz} практически совпадают. Это объясняется треть-

им соотношением (4.6): $\sigma_z = \sigma_{bz}(1 - \mu_{sz})$, из которого следует, что при коэффициенте $\mu_{sz} = 0.01$ соотношение между общим напряжением в железобетоне σ_z и действительным напряжением в бетоне σ_{bz} составляет 0.99.

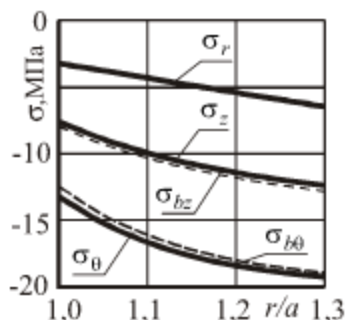


Рис.4.7. Напряжения в железобетонном цилиндре при равномерном кольцевом армировании

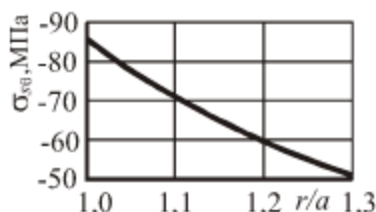


Рис.4.8. Напряжения в кольцевой арматуре при равномерном кольцевом армировании

Полученную нагрузку на цилиндр можно сравнить с нагрузкой для однородной конструкции, имеющей аналогичное армирование. По условию (4.21) наибольшая растягивающая деформация в цилиндре достигается у внутренней поверхности. Для однородной конструкции величину внутреннего давления p_a можно найти по формуле

$$p_a^{odn} = \frac{E_b^{(0)} \varepsilon_r^{(0)}}{(1 - \nu^2) \cdot (s_r^{(0)} - s_{b\theta}^{(0)}) \cdot (1 - \mu_s^{(0)})}, \quad (4.31)$$

где $\nu = 0.5$, $E_b^{(0)}$ — значение модуля упругости бетона в точке $r = a$, $\varepsilon_r^{(0)}$ — величина предельной относительной деформации бетона в точке $r = a$.

Выражение (4.31) получено следующим образом. Напряжения в однородном цилиндре представляем

$$\sigma_r = p_a^{odn} s_r, \quad \sigma_\theta = p_a^{odn} s_\theta, \quad (4.31,a)$$

где функции напряжений s_r и s_θ получены из решения системы (4.10) для толстостенного цилиндра при граничных условиях:

$$\begin{aligned} r = a & \quad s_r = -1, \\ r = b & \quad s_r = -d. \end{aligned} \quad (4.31,б)$$

Здесь d – отношение величины внешнего давления p_b^{odn} к величине внутреннего давления p_a^{odn} . Предельная относительная деформация растяжения бетона принимается постоянной

$$\varepsilon_{btu} = \varepsilon_r^{(0)}, \quad (4.31,в)$$

величина модуля упругости бетона

$$E_b = E_b^{(0)}, \quad (4.31,г)$$

начальное значение коэффициента μ_s

$$\mu_s = \mu_s^{(0)}. \quad (4.31,д)$$

Подставив выражения (4.31,а) – (4.31,д) в уравнение (4.21), получим величину давления p_a^{odn} . Для определения давления на однородный железобетонный цилиндр в формулу (4.31) подставляем $E_b^{(0)} = 16000$ МПа, $\varepsilon_r^{(0)} = 4.248 \times 10^{-4}$, $s_r = -1$, $s_{b0} = -5.519$, $\mu_s^{(0)} = 0.02$. Расчет дает значение давления $p_a^{odn} = 2.046$ МПа. Выше была определена величина нагрузки для равнопрочного цилиндра $p_a = 3.227$ МПа. Таким образом, коэффициент эффективности работы равнопрочного цилиндра по сравнению с однородным составляет 1,577.

4.2.2. Решение задачи при неравномерном армировании

В данном разделе коэффициент армирования $\mu_{sz} = const$, а μ_{s0} задан выражением (4.19). Для решения обратной задачи для равнопрочного цилиндра используем систему (4.26). В подобных условиях аналитическое решение удается получить лишь для второго уравнения системы. Поэтому в целом решение данной задачи необходимо искать численными методами.

На основании изложенного получено решение задачи оптимизации для следующих исходных данных: $E_b = 2.16 \times 10^4$ МПа, $b/a = 1.3$, $p_b/p_a = 2$, $\mu_0 = 0.01$, $\xi = 4.187$, $\mu_{sz} = 0.01$. Коэффициент $\rho = -6.35 \times 10^{-9}$ МПа⁻¹, а $\omega = 5.603 \times 10^{-4}$. При этом значения коэффициентов ρ и ω определяются так же, как и при расчете равнопрочного железобетонного цилиндра, имеющего равномерное кольцевое армирование.

Решение системы (4.26) было получено методом Рунге-Кутты четвертого порядка при значениях начальных параметров:

$$\begin{cases} \sigma_r = -3.348 \text{ МПа,} \\ \epsilon_\theta = -4.291 \times 10^{-4}. \end{cases} \quad (4.32)$$

Результаты численного интегрирования представлены в табл.4.3.

Таблица 4.3
Распределение напряжений и модуля упругости бетона E_b при
неравномерном кольцевом армировании

r/a	σ_r , МПа	σ_θ , МПа	σ_z , МПа	E_b , МПа	$\sigma_{s\theta}$, МПа
1.00	-3.348	-13.329	-7.892	16000	-85.827
1.05	-3.879	-15.535	-9.227	20740	-77.891
1.10	-4.447	-17.155	-10.289	24870	-71.014
1.15	-5.027	-18.348	-11.148	28470	-65.021
1.20	-5.601	-19.227	-11.850	31640	-59.766
1.25	-6.160	-19.873	-12.430	34450	-55.132
1.30	-6.696	-20.345	-12.916	36950	-51.028

Величины давлений на цилиндр составили $p_a = 3.348$ МПа и $p_b = 6.696$ МПа. Графики распределения модуля упругости $E_b(r)$ и растягивающей деформации $\epsilon_r(r)$ представлены на рис.4.9. При этом можно видеть, что изображенные на рис.4.9 и рис.4.6 распределения модуля упругости $E_b(r)$ и растягивающей деформации $\epsilon_r(r)$ незначительно отличаются друг от друга. Эпюры напряжений σ_r , σ_θ , $\sigma_{b\theta}$, σ_z и σ_{bz} показаны на рис.4.10.

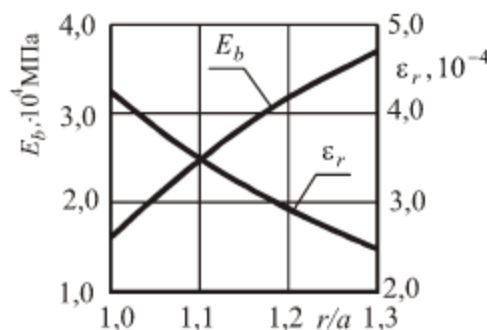


Рис.4.9. Изменение модуля упругости бетона E_b и деформаций ϵ_r при неравномерном кольцевом армировании

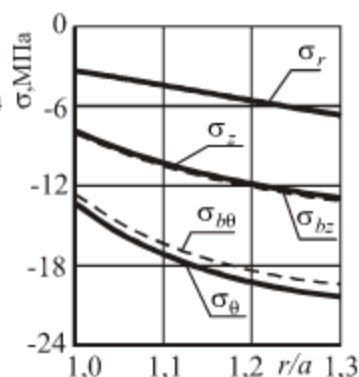


Рис.4.10. Напряжения в железобетонном цилиндре при неравномерном кольцевом армировании

Распределение напряжений в кольцевой арматуре представлено на рис.4.11.

Сравним полученную нагрузку на цилиндр с нагрузкой для однородной конструкции, имеющей аналогичное армирование. Наибольшая растягивающая деформация в цилиндре достигается у

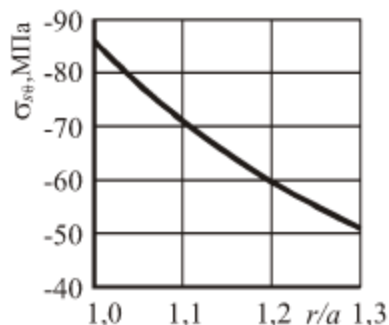


Рис.4.11. Напряжения в кольцевой арматуре при неравномерном кольцевом армировании

внутренней поверхности. Для определения наибольшего внутреннего давления на однородный цилиндр используется выражение (4.31), где $E_b^{(0)} = 16000 \text{ МПа}$, $\varepsilon_r^{(0)} = 4.248 \times 10^{-4}$, $\nu = 0.5$, $s_r = -1$, $s_\theta = -5.308$, $\mu_s^{(0)} = 0.02$. Расчет дает значение давления $p_a^{odn} = 2.147 \text{ МПа}$. Выше была определена величина нагрузки для равнопрочного цилиндра с неравномерным кольцевым армированием $p_a = 3.348 \text{ МПа}$. Сопоставляя эти два

значения, получим коэффициент эффективности $\beta = 1,6$.

Используя приведенные выше методики, было исследовано влияние соотношения давлений p_b/p_a на величину β . При этом величины остальных параметров оставались постоянными. Значение отношения p_b/p_a изменялось в пределах от 1 до 6. В результате проведенных расчетов оказалось, что величина коэффициента β практически не изменяется при изменении отношения p_b/p_a . Для равномерного армирования $\beta = 1.58$, а для неравномерного армирования $\beta = 1.56$. Такое незначительное отличие объясняется тем, что распределение модуля упругости бетона в теле железобетонного цилиндра практически не зависит от отношения p_b/p_a .

Также было исследовано влияние величины коэффициента осевого армирования μ_{sz} на величину коэффициента эффективности работы равнопрочного цилиндра β , результаты которого показаны на рис.4.12 и приведены в таблице 4.4.

Из рис.4.12 и табл.4.4 видно, что с ростом коэффициента μ_{sz} растет и коэффициент β , но этот рост очень мал. Можно отметить, что при неравномерном кольцевом армировании величина коэффициента β меньше, чем при равномерном кольцевом армировании. Для объяснения этого эффекта было проведено исследование влияние изменения коэффициента неравномерности распределения кольцевой арматуры ξ на величину коэффициента β при условии, что все остальные параметры

задачи остаются неизменными. Результаты этого исследования представлены на рис.4.12. Из рисунка видно, что с увеличением неравномерности кольцевого армирования, а также с увеличением величины коэффициента ξ , значение коэффициента эффективности работы равнопрочного цилиндра β уменьшается.

Таблица 4.4

Результаты исследования влияния величина коэффициента осевого армирования μ_{sz} на коэффициент эффективности работы равнопрочного цилиндра β

Величина коэффициента осевого армирования μ_{sz} , %	Величина коэффициента эффективности работы равнопрочного цилиндра β	
	Равномерное кольцевое армирование	Неравномерное кольцевое армирование
0	1.5764	1.5587
1	1.577	1.5595
2	1.5772	1.5601
3	1.5777	1.5612
4	1.5783	1.562
5	1.5786	1.5625
6	1.5795	1.5636

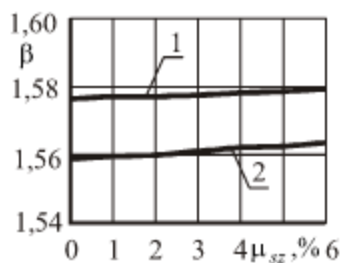


Рис.4.12. Зависимость коэффициента β от коэффициента осевого армирования μ_{sz} .
1 – равномерное кольцевое армирование;
2 – неравномерное кольцевое армирование.



Рис.4.13. Зависимость коэффициента β от коэффициента неравномерности кольцевого армирования ξ .

4.3. Способ практической реализации метода путем создания кусочно-однородных конструкций

Как и в случае с бетонными цилиндрами, непрерывные физико-механические характеристики бетона в железобетонном цилиндре можно аппроксимировать кусочно-постоянными функциями. При этом возникает необходимость рассматривать кусочно-однородные тела. Механические характеристики бетона каждого слоя назначаются исходя из решения

задачи о равнопрочной конструкции. Полученный таким образом цилиндр можно назвать близким к равнопрочному.

4.3.1. Решение задачи при равномерном армировании

Рассмотрим решение задачи об аппроксимации непрерывной функции модуля упругости бетона железобетонного цилиндра, определенной в п. 4.2.1, на примере трехслойного цилиндра. Стенку цилиндра разбиваем на три равные части. Назначить величину модуля упругости бетона для каждого слоя можно двумя способами: по среднему значению в слое и по левому краю. Был проведен анализ, который показал, что второй способ является более эффективным. Используя данные табл.4.2, определяем значение модуля упругости для каждого слоя. Для описания напряженного состояния конструкции используем систему (4.33). Эта система описывает цилиндр, нагруженный относительными нагрузками $\bar{p}_a = 1$ и $\bar{p}_b = 2$. Уравнения, используемые в системе (4.33), основаны на решении, полученном в п.4.1. Граничные условия в напряжениях представлены первым и третьим уравнением, а условия в перемещениях – вторым и четвертым. Пятое уравнение описывает граничное условие на внешней поверхности цилиндра, а шестое – на внутренней поверхности. В системе константы C_0 и C_1 относятся к первому слою, C_2 и C_3 – ко второму, а C_4 и C_5 – к третьему. Для описания напряжений σ_r используется выражение (4.13), а для деформаций ε_0 – (4.11).

$$\begin{aligned}
 & -\frac{C_0}{2(1-\mu_{s0})}r_2^{-2+\mu_{s0}} + C_1r_2^{-\mu_{s0}} = -\frac{C_2}{2(1-\mu_{s0})}r_2^{-2+\mu_{s0}} + C_3r_2^{-\mu_{s0}}; \\
 & \frac{(1-\mu_s)C_0}{E_{b1}^{(1)}(1-\mu_{s0})^2 + E_s\mu_{s0}(1-\mu_s)} = -\frac{(1-\mu_s)C_2}{E_{b1}^{(2)}(1-\mu_{s0})^2 + E_s\mu_{s0}(1-\mu_s)}; \\
 & -\frac{C_2}{2(1-\mu_{s0})}r_3^{-2+\mu_{s0}} + C_3r_3^{-\mu_{s0}} = -\frac{C_4}{2(1-\mu_{s0})}r_3^{-2+\mu_{s0}} + C_5r_3^{-\mu_{s0}}; \\
 & \frac{(1-\mu_s)C_2}{E_{b1}^{(2)}(1-\mu_{s0})^2 + E_s\mu_{s0}(1-\mu_s)} = \frac{(1-\mu_s)C_4}{E_{b1}^{(3)}(1-\mu_{s0}) + E_s\mu_{s0}(1-\mu_s)}; \\
 & -\frac{C_4}{2(1-\mu_{s0})}r_4^{-2+\mu_{s0}} + C_5r_4^{-\mu_{s0}} = -2; \\
 & \frac{C_0}{2(1-\mu_{s0})}r_1^{-2+\mu_{s0}} + C_1r_1^{-\mu_{s0}} = -1.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Здесь $r_i = a + (b - a)(i - 1)/n$ – радиусы границ слоев, n – число слоев в цилиндре, $\nu = 0.5$, $E_b^{(j)} = E_b^j / (1 - \nu^2)$, E_b^j – определяются по табл. 4.3. Величина предельных деформаций бетона для каждого слоя также приведена в табл.4.5.

Наибольшее внутреннее давление p_a можно определить по формуле (4.31), где $E_b^{(0)} = 16000$ МПа, $\varepsilon_r^{(0)} = 4.248 \times 10^{-4}$, $\nu = 0.5$, $\mu_s^{(0)} = 0.02$.

Величины $s_r^{(0)}$ и $s_{b0}^{(0)}$ можно определить из равенств (4.34).

$$s_r^{(0)} = -\frac{C_0}{2(1 - \mu_{s0})} r_1^{-2 + \mu_{s0}} + C_1 r_1^{-\mu_{s0}},$$

$$s_{b0}^{(0)} = \frac{C_0}{2(1 - \mu_{s0})} \cdot \frac{E_{b1}^{(1)}(1 - \mu_{s0})^2 - E_s \mu_{s0}(1 - \mu_s)}{E_{b1}^{(1)}(1 - \mu_{s0})^2 + E_s \mu_{s0}(1 - \mu_s)} r_1^{-2 + \mu_{s0}} + C_1 r_1^{-\mu_{s0}}, \quad (4.34)$$

Выражения (4.34) равны $s_r = -1$ и $s_{b0} = -4.287$ соответственно. Подставляя эти значения в формулу (4.31), получим значение давления $p_a = 2.81$ МПа. В п.4.2.1 была определена величина внутреннего давления для однородного цилиндра $p_a^{одн} = 2.046$ МПа. Отсюда следует, что коэффициент эффективности работы кусочно-однородного цилиндра, близкого к равнопрочному, по сравнению с однородным составляет $\beta = 1,38$.

Таблица 4.5

Физико-механические характеристики материала трехслойного толстостенного железобетонного цилиндра с равномерным кольцевым армированием

№ п./п.	Модуль упругости E_b , МПа	Предельная деформация бетона $\varepsilon_{btm}, 10^{-4}$
1	16000	4.248
2	24670	3.514
3	31270	2.956

Аналогичным образом можно рассчитать и цилиндр, состоящий из четырех и пяти слоёв. Ниже приводятся только лишь конечные результаты расчетов.

После расчетов по формуле (4.31) для четырехслойного цилиндра имеем $p_a = 2.92$ МПа. Основные физико-механические характеристики бетона для каждого слоя приведены в табл.4.6. Полученную нагрузку на кусочно-однородный цилиндр сравниваем с нагрузкой для однородной конструкции. При этом коэффициент эффективности работы кусочно-

однородного цилиндра, близкого к равнопрочному, по сравнению с однородным составляет $\beta = 1,425$.

После расчетов по формуле (4.31) для пятислояного цилиндра имеем $p_a = 2,98$ МПа. Основные физико-механические характеристики бетона для каждого слоя приведены в табл.4.7. Сравнивая нагрузку на кусочно-однородный цилиндр с нагрузкой для однородной конструкции, получим $\beta = 1,46$.

Таблица 4.6

Физико-механические характеристики материала четырехслойного толстостенного железобетонного цилиндра с равномерным кольцевым армированием

№ п./п.	Модуль упругости $E_b, МПа$	Предельная растяжимость бетона $\varepsilon_{btu}, 10^{-4}$
1	16000	4.248
2	22730	3.679
3	28180	3.217
4	32670	2.837

Таблица 4.7

Физико-механические характеристики материала пятислояного толстостенного железобетонного цилиндра с равномерным кольцевым армированием

№ п./п.	Модуль упругости $E_b, МПа$	Предельная растяжимость бетона $\varepsilon_{btu}, 10^{-4}$
1	16000	4.248
2	21490	3.783
3	26130	3.391
4	30080	3.056
5	33470	2.769

На рис.4.14 показано распределение напряжений в рассмотренных многослойных цилиндрах.

Анализируя напряженное состояние кусочно-однородных цилиндров, можно сделать достаточно очевидный вывод. Также, как и в случае с бетонным цилиндром, коэффициент эффективности работы цилиндров зависит от того, на сколько слоев происходит разбиение стенки цилиндра. Чем больше слоев, тем выше этот коэффициент. При этом величина этого коэффициента всегда меньше, чем у цилиндра имеющего непрерывную неоднородность.

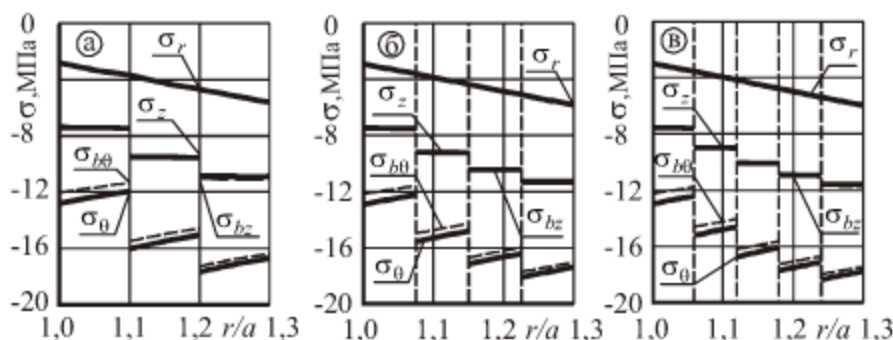


Рис.4.14. Распределение напряжений в кусочно-однородном железобетонном цилиндре с равномерным кольцевым армированием, разбитом на три (а), четыре(б) и пять (в) слоев.

4.3.2. Решение задачи при неравномерном армировании

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим решение задачи на примере трехслойного цилиндра. Поскольку кольцевое армирование неравномерно, то при решении системы уравнений (4.10) используем численный метод. При этом значение коэффициента Пуассона в (4.10) принимаем $\nu = 0.5$:

$$\begin{cases} \sigma'_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\varepsilon_\theta \left[\frac{4}{3} E_b \cdot (1 - \mu_{s\theta})^2 + E_s \cdot \mu_{s\theta} \cdot (1 - \mu_s) \right] - \sigma_r \cdot \mu_{s\theta} \cdot (1 - \mu_s)}{1 - \mu_s}, \\ \varepsilon'_\theta = -\frac{(2 - \mu_{s\theta})}{r} \cdot \varepsilon_\theta \end{cases} \quad (4.35)$$

Величина модуля упругости бетона E_b определяется выражением

$$E_b = \begin{cases} E_b^1, & r_1 \leq r \leq r_2 \\ E_b^2, & r_2 \leq r \leq r_3 \\ E_b^3, & r_3 \leq r \leq r_4 \end{cases} \quad (4.36)$$

где r_j – радиусы границ слоев. Значение модуля упругости для каждого слоя E_b^j приведены в табл.4.8.

С помощью системы (4.35) описываем напряженно-деформированное состояние железобетонного цилиндра при граничных условиях:

$$\begin{aligned} r = a, & \quad \sigma_r = -1; \\ r = b, & \quad \sigma_r = -2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Эти условия задают относительные внешние и внутренние давления, действующие на цилиндр. Систему (4.35) решаем совместно с граничными условиями (4.37) методом Рунге-Кутты.

Для определения абсолютного значения давления p_a в выражение (4.31) подставляем следующие значения $\nu = 0.5$, $s_r^{(0)} = -1$, $s_{b0}^{(0)} = -4.158$, $\mu_s^{(0)} = 0.02$, $E_b^{(0)} = 16000$ МПа, $\varepsilon_r^{(0)} = 4.248 \times 10^{-4}$. В результате получим величину давления на кусочно-однородный цилиндр $p_a = 2.93$ МПа. В п.4.2.2 была определена величина внутреннего давления для однородного цилиндра $p_a^{odn} = 2.15$ МПа. Таким образом, коэффициент эффективности работы кусочно-однородного цилиндра, близкого к равнопрочному, по сравнению с однородным равен $\beta = 1,36$.

Таблица 4.8

Физико-механические характеристики материала трехслойного толстостенного железобетонного цилиндра с неравномерным кольцевым армированием

№ п.п.	Модуль упругости $E_b, МПа$	Предельная растяжимость бетона $\varepsilon_{btu}, 10^{-4}$
1	16000	4.248
2	24870	3.498
3	31640	2.924

Аналогичным решается задача для цилиндра, состоящего из четырех и пяти слоёв. Ниже приводятся лишь конечные результаты расчетов.

Для четырехслойного цилиндра по формуле (4.31) находим $p_a = 3.033$ МПа. Основные физико-механические характеристики бетона для каждого слоя приведены в табл.4.9. Сравнивая полученное давление с нагрузкой для однородной, получим $\beta = 1,413$.

Таблица 4.9

Физико-механические характеристики материала четырехслойного толстостенного железобетонного цилиндра с неравномерным кольцевым армированием

№ п.п.	Модуль упругости $E_b, МПа$	Предельная растяжимость бетона $\varepsilon_{btu}, 10^{-4}$
1	16000	4.248
2	22880	3.666
3	28470	3.193
4	33090	2.802

После расчетов по формуле (4.31) для пятислойного цилиндра имеем $p_a = 3.096$ МПа. Основные физико-механические характеристики бетона для каждого слоя приведены в табл.4.10.

Таблица 4.10

Физико-механические характеристики материала пятислойного толстостенного железобетонного цилиндра с неравномерным кольцевым армированием

№ п.п.	Модуль упругости $E_b, \text{МПа}$	Предельная растяжимость бетона $\varepsilon_{btu}, 10^{-4}$
1	16000	4.248
2	21610	3.773
3	26360	3.371
4	30420	3.028
5	33910	2.732

В данном случае коэффициент эффективности равен $\beta = 1,44$.

На рис.4.15 показаны эпюры напряжений, соответствующие трем способам разбивки.

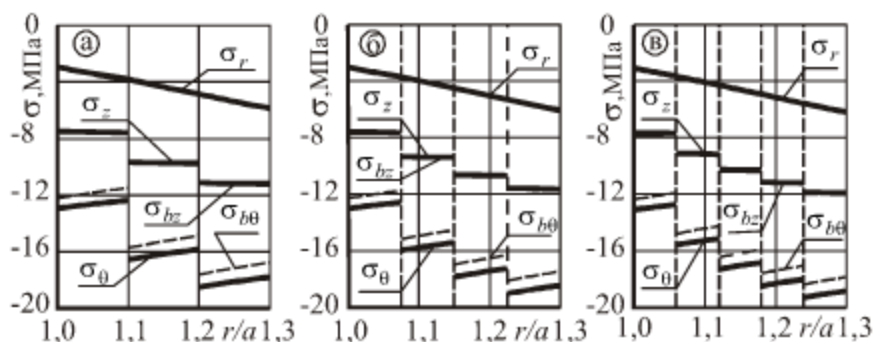


Рис.4.15. Распределение напряжений в кусочно-однородном железобетонном цилиндре с неравномерным кольцевым армированием, разбитом на три (а), четыре(б) и пять (в) слоев.

На основании полученных результатов расчетов кусочно-однородных железобетонных цилиндров с неравномерным кольцевым армированием можно получить выводы, аналогичные полученным в п.4.3.1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев В.И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. – М. Изд-во АСВ, 2002. – 288 с.
2. Андреев В.И., Потехин И.А. О способе создания оптимальных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел. РААСН, Вестник отделения стр. наук, 2007, стр. 48-52
3. Андреев В.И., Потехин И.А. Итерационный метод построения модели равнопрочного цилиндра. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, №1, 2008 с.45-49
4. Андреев В.И., Потехин И.А. Моделирование и создание равнопрочного цилиндра на основе итерационного подхода. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. v.4, is.1, 2008, pp. 79-84
5. Андреев В.И. Потехин И.А. Равнопрочные и равнонапряженные конструкции. Моделирование и создание. Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века, 2009, № 6, 48-50
6. Андреев В.И., Потехин И.А. Расчет толстостенного железобетонного цилиндра при неравномерном кольцевом армировании. РААСН, Вестник отделения стр. наук, 2009, т.1, с. 17-22
7. Байков В.Н., Сигалов Э.Е. Железобетонные конструкции: Общий курс: Учеб. для вузов. – 5-е изд. перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1991. – 767 с.: ил.
8. Батраков В.Г. Модифицированные бетоны. Теория и практика. – 2-е изд., перераб. и доп. – М., 1998. – 768 с.
9. Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. М., Стройиздат, 1961.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.2. – М.: Физматгиз, 1960. – 620 с.
11. Бидный Г.Р. Расчет железобетонных конструкций методом конечных элементов. Кишинев: Штиинца, 1979.
12. Бич П.М. Вариант теории прочности бетона// Бетон и железобетон. 1980. № 6. С. 28-29.
13. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Изд-во АСВ, Москва, 1995 - 572 с.
14. Веригин К.П. Сопротивление бетона разрушению при одновременном действии осевого растяжения и сжатия// Бетон и железобетон. 1956. №2. С. 64-66.
15. Гениев Г.А., Киссюк В.Н. К экспериментальному обоснованию условия прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению-сжатию// Сб. тр./ М.: АСН АССР, ЦНИИСК. 1963. С. 56-76.
16. Гениев Г.А., Киссюк В.Н. К вопросу обобщения теории прочности бетона// Бетон и железобетон. 1965. №2. С. 16-19.
17. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М., 1974.
18. ГОСТ 24452-80. Бетоны. Методика определения призмной прочности, модуля упругости и коэффициента Пуассона.
19. ГОСТ 10180-90. Бетоны. Методы определения прочности по контрольным образцам.
20. Демидович Б.П., Марон И.А., Шуварова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 368 с.
21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

22. Каприелов С.С., Булгакова М.Г., Вихман Я.Л. Деформативные свойства бетонов с использованием ультрадисперсных отходов Ермаковского завода ферросплавов// Бетон и железобетон. 1991. №3. С. 24-25.
23. Каприелов С.С., Шейнфельд А.В., Кривобородов Ю.Р. Влияние структуры цементного камня с добавкой микрокремнезема и суперпластификатора на свойства бетона// Бетон и железобетон. 1992. № 7. С. 4-7.
24. Каприелов С.С., Карпенко Н.И., Шейнфельд А.В., Кузнецов Е.Н. Влияние органоминерального модификатора МБ-50С на структуру и деформативность цементного камня и высокопрочного бетона// Бетон и железобетон. 2003. №3. С. 2-7.
25. Каприелов С.С., Карпенко Н.И., Шейнфельд А.В., Кузнецов Е.Н. О регулировании модуля и ползучести высокопрочных бетонов с модификатором МБ-50С// Бетон и железобетон. 2003. № 6. С. 8-12.
26. Карпенко Н.И. Об одной характерной функции прочности бетона при трехосном сжатии// Строительная механика и расчет сооружений. 1982. №2. С. 33-36.
27. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М., Стройиздат, 1996. – 416 с.
28. Круглов В.М. Нелинейные соотношения и критерий прочности бетона в трехосном напряженном состоянии// Строительная механика и расчет сооружений. 1987. №1. С.40-44.
29. Лехницкий С.Г. Радиальное распределение напряжений в клине и полу-плоскости с переменным модулем упругости //ПММ. 1962. Т. XXVI. Вып.1. С. 146-151.
30. Лукша Л.К. Прочность трубобетона. Минск, 1977.
31. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Ил., 1954. – 648 с.
32. Патуроев В.В. Полимербетон. – М.: Стройиздат, 1987. – 286 с.
33. Смоляго Г.А. К вопросу о предельной растяжимости бетона// Бетон и железобетон. 2002. № 6. С. 6-9.
34. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции. Нормы проектирования. – М.: Стройиздат, 1989. – 79 с.
35. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. - М.: Наука, 1979. - 560 с.
36. Торлин В.Н. Прямая и обратная задачи теории упругости для неоднородного тела //Прикл. мех. 1976. Т. XII. № 3.
37. Филоненко-Бородич М.М. Механические теории прочности. – М.: МГУ, 1961. – 90 с.
38. Хайрер Э. и др. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: Мир, 1990. - 512 с.
39. Холмянский М.М. Бетон и железобетон: деформативность и прочность. – М.: Стройиздат, 1997. -576 с.
40. Язьев Б.М. Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров. Дисс. канд. техн. наук. - М., 1990. -171 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
ГЛАВА 1. Задачи теории упругости неоднородных тел	5
1.1. Уравнения теории упругости неоднородных тел	5
1.2. Прямые задачи.	9
1.2.1. Вывод разрешающих уравнений.	9
1.2.2. Методы решения прямых задач.	11
1.3. Обратные задачи.	14
ГЛАВА 2. Решения обратных задач для классических теорий прочности.	16
2.1. Теория прочности максимальных нормальных напряжений	16
2.1.1. Решение для цилиндра (диска)	16
2.1.2. Решение для сферической оболочки.	19
2.2. Теория прочности максимальных линейных деформаций. .	20
2.2.1. Решение для цилиндра (диска)	20
2.2.2. Решение для сферической оболочки.	22
2.3. Теория прочности максимальных касательных напряжений	24
2.3.1. Решение для цилиндра (диска)	24
2.3.2. Решение для сферической оболочки.	28
2.4. Энергетическая теория прочности.	29
2.4.1. Решение для цилиндра (диска)	29
2.4.2. Решение для сферической оболочки.	33
ГЛАВА 3. Метод решения обратных задач для толстостенных равнопрочных цилиндра и сферы	34
3.1. Деформационные свойства бетонов. Методы расчетов на прочность бетонных и железобетонных конструкций	35
3.2. Решение задачи оптимизации работы конструкции на основе критерия прочности П.П.Баландина	42
3.2.1. Решение задачи для цилиндра	42
3.2.2. Решение задачи для сферической оболочки	44

3.2.3. Полимербетон. Примеры решения	46
3.3. Метод практической реализации путем создания кусочно- однородных конструкций. Примеры	51
3.3.1. Решение задачи для цилиндра	52
3.3.2. Решение задачи для сферической оболочки	56
ГЛАВА 4. Обратная задача для толстостенного железобетонного цилиндра с учетом анизотропии	61
4.1. Общая модель железобетона. Прямые задачи	61
4.2. Обратные задачи для равнопрочного цилиндра	67
4.2.1. Решение задачи при равномерном армировании	67
4.2.2. Решение задачи при неравномерном армировании	72
4.3. Способ практической реализации метода путем создания кусочно-однородных конструкций	75
4.3.1. Решение задачи при равномерном армировании	76
4.3.2. Решение задачи при неравномерном армировании	79
Библиографический список	82

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Владимир Игоревич Андреев, Иван Александрович Потехин

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ПРОЧНОСТИ ТОЛСТОСТЕННЫХ
ОБОЛОЧЕК

Монография

Редактор О.А. Гладкова

Компьютерный набор и верстка В.И. Андреева

Лицензия ЛР №020675 от 09.12.97 г.

Подписано в печать 21.03. 2011 г.	Формат 60×84 1/16	Печать офсетная	
И-66	Объем 5,5 п.л.	Т. 100	Заказ 116

ГОУ ВПО Московский государственный строительный университет.

Ред.-изд. отдел. Тел. (499) 183-97-95, e-mail rio@mgsu.ru.

Типография МГСУ. Тел. (499) 183-91-90, (499) 183-67-92, (499) 183-91-44

E-mail: info@mgsuprint.ru

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК